

Solutions de nucléation tourbillonnaires dans un modèle d'écoulement superfluide

Cristián HUEPE et Marc-Étienne BRACHET

Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure, associé au CNRS et aux Universités Paris-6 et -7, 24, rue Lhomond, 75231 Paris cedex 05, France.

Résumé. Les solutions stationnaires stables et instables (de nucléation) de l'équation de Schrödinger non linéaire, décrivant l'écoulement superfluide autour d'un disque, sont calculées numériquement. La branche stable et la branche instable sont connectées par une bifurcation nœud-col. La branche instable donne naissance, au travers d'une bifurcation fourche, à des solutions non symétriques par rapport au diamètre du disque. Les solutions de nucléation symétriques et non symétriques contiennent respectivement deux ou un tourbillons qui émergent du disque à des vitesses sous-critiques.

Mots clés : superfluidité / tourbillon / nucléation / vitesse critique / bifurcation nœud-col

Vortical nucleation solutions in a model of superflow

Abstract. *Stable and unstable (nucleation) stationary solutions of the non-linear Schrödinger equation, describing super-flow around a disc, are numerically computed. The stable branch and the unstable branch are connected through a saddle-node bifurcation. The unstable branch generates, through a pitchfork bifurcation, solutions that are asymmetric with respect to the diameter of the disc. The symmetric and asymmetric nucleation solutions contain, respectively, two or one vortices that emerge from the disc at sub-critical velocities.*

Keywords: *superfluidity / vortex / nucleation / critical velocity / saddle-node bifurcation*

Abridged English Version

The purpose of this Note is to numerically compute and study the stationary stable and unstable (nucleation) solutions of the non-linear Schrödinger equation (NLSE) describing the superflow around a cylinder.

Note présentée par Yves POMEAU.

We study the effect of a moving disc of diameter d in a two-dimensional superfluid at rest described by the action (1), where ψ is a complex field, $\bar{\psi}$ its conjugate and \mathcal{F} is the energy. The coherence length ξ and the speed of sound c (for a mean fluid density $\rho_0 = 1$) are the physical parameters of the superfluid. We impose a velocity \vec{U} for the disc by defining \mathcal{F} (2) with \mathcal{E} (3) and \mathcal{P} (4), where $V(r) = (V_0/2) \tanh [4(r - d/2)/d]$ is a potential representing the disc. The NLSE (5) is the Euler–Lagrange equation corresponding to (1), where $\Omega(\vec{x}) = 1 - V(\vec{x})$. Madelung’s transformation: $\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\phi/\sqrt{2} c\xi)$ and $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$ (where ρ and \vec{v} are the fluid density and velocity, respectively) maps the NLSE into the continuity equation (6) and the Bernoulli equation (7) (with a supplementary ‘quantum pressure’ term). Stationary solutions of equation (5) must extremize \mathcal{F} by construction, which yields: $d\mathcal{E}/d\mathcal{P}_i = U_i$ and $d\mathcal{F}/dU_i = -\mathcal{P}_i$.

The stable stationary states of equation (5) (with minimal \mathcal{F}) are reached by integrating forward the real Ginzburg–Landau equation (RGLE) (8) with time stepping scheme (9), whose fixed points are independent of the time step σ . We developed another numerical tool to find unstable stationary solutions by Newton’s method (Seydel, 1988). Rather than looking for zeros of equation (5), we search for fixed points of equation (9) (Mamun and Tuckerman, 1995). Calling $\psi_{(j)}$ the value of the field ψ over the j th collocation point, this is equivalent to finding ψ^* such that $f_{(j)}(\psi^*) \equiv \psi_{(j)}^*(t + \sigma) - \psi_{(j)}^*(t) = 0$. Every Newton step requires the solution for $\delta\psi_{(k)}$ of $\sum_k [df_{(j)}/d\psi_{(k)}] \delta\psi_{(k)} = -f_{(j)}(\psi)$, which is realized by an iterative bi-conjugate gradient method (Press *et al.*, 1994). This method uses the direct application of $[df_{(j)}/d\psi_{(k)}]$ given in equation (11) over an arbitrary field ϕ . Here, σ is a free parameter that controls the preconditioning (Mamun and Tuckerman, 1995).

The functional \mathcal{E} and energy \mathcal{F} of the stationary solutions are shown in *figure 1* as a function of the Mach number ($M = |\vec{U}|/c$). The stable branch (a) disappears with the unstable solution (c) at a saddle-node bifurcation when $M = M_c \approx 0.4286$. The energy \mathcal{F} has a cusp at the bifurcation point, which is the generic behaviour for a saddle-node. There are no stationary solutions beyond this point. When $M \approx 0.4282$ the unstable symmetric branch (c) bifurcates at a pitchfork to a pair of asymmetric branches (b). These branches have not yet been considered in the literature. Their nucleation energy barrier is given by $(\mathcal{F}_{b'} - \mathcal{F}_{a'})$, which is roughly half of the barrier for the symmetric branch $(\mathcal{F}_{c'} - \mathcal{F}_{a'})$.

We now relate branches in *figure 1* to the presence vortices in the solution. When $M_n \leq M \leq M_c$, solutions are irrotational ($M_n \sim 0.405$ as indicated in *fig. 1*). For $M \leq M_n$ the stable branch (a) remains irrotational (*fig. 2A*) while the unstable branch (b) corresponds to a one vortex solution (*fig. 2B*) and the unstable branch (c), to a two vortex solution (*fig. 2C*). The distance between the vortices and the obstacle in branches (b) and (c) increases when M is decreased. Branch (c) is precisely the situation described by Pomeau and Rica (1993). Furthermore, the value $M_c \approx 0.4286$ is close to their predicted $\sqrt{2/11}$. However, the existence of a vortex-less interval $M_n \leq M \leq M_c$ was not predicted. *Figure 2D* shows the result of integrating the NLSE forward in time with, as initial condition, a slightly perturbed unstable symmetric stationary state (*fig. 2C*). The perturbation drives the system over the nucleation barrier and cycles it, after the emission of two vortices, back to a stationary stable solution. This shows that the branch (c) corresponds to hyperbolic fixed points of NLSE.

Figure 2E and *F* shows the phase of the field at the surface of the disc ($r = d$ and $\theta \in [0, 2\pi]$) for four different flow speeds. In both unstable branches, 2π -discontinuities, a diagnostic of vortex crossing, appear between $M = 0.40$ and $M = 0.41$.

In summary, the numeric study of the NLSE unstable stationary solutions has allowed us to compute the symmetric nucleation solutions proposed by Pomeau and Rica (1993) and new asymmetric solutions, with a lower nucleation barrier. The point where vortices emerge from the cylinder was determined on the bifurcation diagram.

1. Introduction

Les écoulements superfluides autour d'un obstacle présentent une transition vers un régime dissipatif au-delà d'une vitesse critique. L'équation de Schrödinger non linéaire (ESNL) décrit la dynamique des superfluides à des températures assez basses pour négliger le fluide normal (Gross, 1963, Ginzburg et Pitaerskii, 1958). Frisch, Pomeau et Rica ont observé cette transition dans l'écoulement autour d'un cylindre en intégrant numériquement l'ESNL. Ils ont interprété leur résultat en terme d'une bifurcation nœud-col entre la branche de solutions stationnaires stables et une branche de solutions stationnaires instables comportant deux vortex attachés au cylindre (Frisch *et al.*, 1992, Pomeau et Rica, 1993). Plus récemment, Hakim a considéré des écoulements décrits par l'ESNL sur des obstacles unidimensionnels représentés par des potentiels. Il a obtenu des expressions analytiques pour les solutions stables et instables et a étudié la transition à la vitesse critique (Hakim, 1997).

L'objectif de cette note est de trouver et d'étudier numériquement les solutions stationnaires stables et instables (de nucléation) du système considéré par Frisch, Pomeau et Rica.

2. Définition du système

Nous étudions l'effet du déplacement à vitesse \vec{U} d'un disque de diamètre d dans un superfluide bidimensionnel au repos décrit par l'ESNL. L'action correspondante s'écrit :

$$\mathcal{A} = \int dt \left\{ \sqrt{2} c \xi \int d^2x \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right) - \mathcal{F} \right\} \quad (1)$$

où ψ est un champ complexe, $\bar{\psi}$ son conjugué et \mathcal{F} l'énergie du système. La longueur de cohérence ξ et la vitesse du son c (pour une densité moyenne $\rho_0 = 1$) sont les paramètres physiques du superfluide. La vitesse de déplacement \vec{U} du disque est imposée en ajoutant un terme $-\mathcal{P} \cdot \vec{U}$ à l'énergie :

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} - \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{U} \quad (2)$$

$$\mathcal{E} = c^2 \int d^2x \left([-1 + V(|\vec{x}|)] |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + \xi^2 |\vec{\nabla} \psi|^2 \right) \quad (3)$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \sqrt{2} c \xi \int d^2x \frac{i}{2} (\psi \vec{\nabla} \bar{\psi} - \bar{\psi} \vec{\nabla} \psi) \quad (4)$$

Le facteur $V(r) = (V_0/2) \tanh [4(r - d/2)/\Delta]$ est un potentiel répulsif qui représente le disque. L'ESNL est l'équation d'Euler-Lagrange correspondant à (1) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\sqrt{2} c \xi} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi} = i \frac{c}{\sqrt{2} \xi} (\Omega(\vec{x}) \psi - |\psi|^2 \psi + \xi^2 \vec{\nabla}^2 \psi) + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (5)$$

où $\Omega(\vec{x}) = 1 - V(\vec{x})$. La transformation de Madelung : $\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\phi/\sqrt{2} c \xi)$ et $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$ (où ρ et \vec{v} sont la densité et la vitesse du superfluide), fait correspondre à (5) un système d'équations de type hydrodynamique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\rho(\vec{v} - \vec{U})] = 0 \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \phi \right] + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + c^2 [\rho - \Omega(\vec{x})] - c^2 \xi^2 \frac{\vec{\nabla}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0 \quad (7)$$

Dans un système de coordonnées suivant le déplacement du disque, ces équations correspondent à l'équation de continuité et à l'équation de Bernoulli (avec un terme supplémentaire de « pression quantique »). Les variables ρ et \vec{v} permettent d'interpréter $\vec{\mathcal{P}}$ comme l'impulsion du fluide entraîné par le disque. Les solutions stationnaires de (5) extrémisent \mathcal{F} par construction, ce qui implique les relations : $d\mathcal{E}/d\mathcal{P}_i = U_i$ et $d\mathcal{F}/dU_i = -\mathcal{P}_i$ ($i =$ indice de coordonnée).

3. Méthodes numériques

Nos codes utilisent des méthodes pseudo-spectrales de Fourier (Gottlieb et Orszag, 1977). Les états stationnaires de (5) correspondant à des minima de l'énergie \mathcal{F} sont obtenus par intégration jusqu'à convergence de l'équation de Ginzburg-Landau réelle :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi} = \frac{c}{\sqrt{2} \xi} (\Omega(\vec{x}) \psi - |\psi|^2 \psi + \xi^2 \vec{\nabla}^2 \psi) - i \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (8)$$

Elle est intégrée en utilisant le schéma :

$$\psi(t + \sigma) = \Theta^{-1} \left[(1 - i\sigma \vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \psi(t) + \sigma \frac{c}{\sqrt{2} \xi} (\Omega(\vec{x}) \psi(t) - |\psi(t)|^2 \psi(t)) \right] \quad (9)$$

avec

$$\Theta = \left[1 - \sigma \frac{c \xi}{\sqrt{2}} \vec{\nabla}^2 \right] \quad (10)$$

L'avantage de cette méthode est que les points fixes de (9) sont des zéros de (8) indépendamment du pas de temps σ .

Solutions de nucléation dans un écoulement superfluide

Nous avons développé un outil numérique supplémentaire qui permet de trouver les solutions stationnaires instables de (8) (Seydel, 1988) par la méthode de Newton. Plutôt qu'annuler le membre de droite de (5), on recherche les points fixes de (9) (Mamun et Tuckerman, 1995). En discrétisant le système et en notant $\psi_{(j)}$ la valeur du champ ψ sur le j -ième point de collocation, cela revient à déterminer un champ ψ^* tel que : $f_{(j)}(\psi^*) \equiv \psi_{(j)}^*(t + \sigma) - \psi_{(j)}^*(t) = 0$. Chaque itération de la méthode de Newton nécessite la résolution de l'expression $\sum_k [df_{(j)}/d\psi_{(k)}] \delta\psi_{(k)} = -f_{(j)}(\psi)$, ce qui est réalisé de façon itérative par la méthode du gradient biconjugué (Press *et al.*, 1994). Cette méthode utilise l'application directe de la matrice $[df_{(j)}/d\psi_{(k)}]$ sur un champ quelconque φ qui est calculé sous la forme :

$$\sum_k [df_{(j)}/d\psi_{(k)}] \varphi_{(k)} = \left\{ \mathcal{O}^{-1} \left[(1 - i\sigma \vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \varphi + \sigma \frac{c}{\sqrt{2}\xi} (\Omega(|x|) \varphi - \psi^2 \bar{\varphi} - 2|\psi|^2 \varphi) \right] - \varphi \right\}_{(j)} \quad (11)$$

Le paramètre libre σ permet de préconditionner le système et d'optimiser la convergence de l'inversion (Mamun et Tuckerman, 1995).

L'ESNL est intégrée en utilisant une méthode de pas de temps alterné (Klein et Majda, 1991). Les résultats présentés ci-après ont été calculés en résolution 128×64 avec une maille de $\Delta x \approx 0,8 \xi$. Le diamètre du disque a été fixé à $d = 10 \xi$. Les paramètres du potentiel V_0 et Δ ont été choisis pour que le champ ψ s'annule à l'intérieur du disque sur une longueur de l'ordre de ξ .

4. Résultats

La fonctionnelle \mathcal{E} et l'énergie \mathcal{F} des champs stationnaires sont représentées sur la *figure 1* en fonction du nombre de Mach ($M = |\vec{U}|/c$). Le comportement de \mathcal{E} montre que la branche stable (a) disparaît avec la solution instable (c) dans une bifurcation nœud-col à $M = M_c \approx 0,4286$. L'énergie \mathcal{F} des solutions stable (a') et instable symétrique (c') présente un point de rebroussement, situation générique pour l'énergie d'une bifurcation nœud-col. Au-delà de ce point, il n'existe plus de solution stationnaire. A un nombre de Mach $M \approx 0,4282$, la branche symétrique instable (c) bifurque en fourche vers une nouvelle branche non symétrique (b) qui n'avait pas été considérée dans la littérature. Cette branche est trouvée, en pratique, en construisant une condition initiale par juxtaposition d'une moitié de solution stable et d'une moitié de solution instable. Sa barrière d'énergie de nucléation est donnée par $\mathcal{F}_b - \mathcal{F}_a$, approximativement la moitié de celle de la branche symétrique ($\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_a$).

Nous allons maintenant relier les différentes branches du diagramme de bifurcation à la présence de vortex dans la solution. Pour les trois branches, l'intervalle $M_n \leq M \leq M_c$ correspond à une solution irrotationnelle ($M_n \sim 0,405$ est indiqué sur la *figure 1*). Pour $M \leq M_n$, la branche stable (a) reste irrotationnelle (*fig. 2A*), la branche instable (b) correspond à une solution à un vortex (*fig. 2B*) et la branche instable (c) correspond à une solution à deux vortex (*fig. 2C*). Les vortex des branches (b) et (c) se situent à une distance plus grande de l'obstacle à mesure que M est diminué. La branche (c) correspond bien à l'image donnée par Pomeau et Rica (1993). De plus, la valeur $M_c \approx 0,4286$ est proche de la valeur $\sqrt{2/11}$ qu'ils ont prédite. Cependant, l'existence de l'intervalle

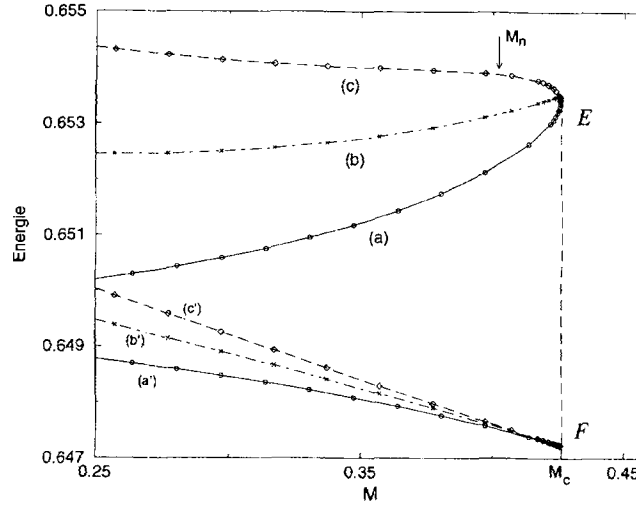


Fig. 1. – Énergie (\mathcal{F}) et fonctionnelle (\mathcal{E}) en fonction du nombre de Mach ($M = |\vec{U}|/c$) avec $d = 10 \xi$. État stable (a); solutions de nucléation : branche non symétrique (b) et branche symétrique (c). Le diagramme contient une bifurcation nœud-col et une bifurcation fourche. La valeur M_n correspond à l'émission d'un vortex à la surface du disque (fig. 2). L'impulsion du fluide entraîné par le disque est donnée par $-\partial\mathcal{F}/\partial U$ (voir texte).

Fig. 1. – Plot of the energy (\mathcal{F}) and the functional (\mathcal{E}) versus Mach number ($M = |\vec{U}|/c$), with $d = 10 \xi$. Stable state (a). Nucleation solutions: asymmetric branch (b) and symmetric branch (c). The diagram shows a saddle-node and a pitchfork bifurcation. The point where vortices cross the surface of the disc (see fig. 2) is labelled M_n . The total fluid momentum is given by $-\partial\mathcal{F}/\partial U$ (see text).

sans vortex $M_n \leq M \leq M_c$ n'avait pas été prévue. La figure 2D montre le résultat d'une intégration temporelle de l'ESNL avec, comme condition initiale, un état stationnaire instable symétrique (fig. 2C) légèrement perturbé. Cette perturbation permet de passer au-delà de la barrière de nucléation et de réaliser un cycle qui ramène le système, après l'émission d'une paire de vortex, à la solution stationnaire stable. Cela montre que la branche (c) correspond à des points fixes hyperboliques de l'ESNL.

Finalement, pour préciser la valeur numérique de M_n , nous avons représenté sur les figures 2E et 2F la phase du champ sur la surface du disque ($r = d$ et $\theta \in [0, 2\pi]$) pour quatre vitesses différentes. Dans les deux branches instables, des discontinuités de 2π apparaissent entre $M = 0,40$ et $M = 0,41$, ce qui indique qu'un vortex a été émis.

5. Conclusions

L'étude numérique des solutions stationnaires instables de l'ESNL a permis de trouver les solutions de nucléation symétriques proposées par Pomeau et Rica (1993), ainsi que de nouvelles solutions non symétriques, de barrière de nucléation plus basse. La position du point d'émission des vortex sur le diagramme de bifurcation a été précisée. Dans le futur, nous comptons faire varier le paramètre ξ/d pour tester des résultats asymptotiques (Josserand, comm. pers.) prévoyant une loi d'échelle en $\sqrt{\xi/d}$ pour la région $M_n \leq M \leq M_c$. Nous comptons également étudier le comportement dynamique sous l'ESNL des solutions de nucléation non symétriques.

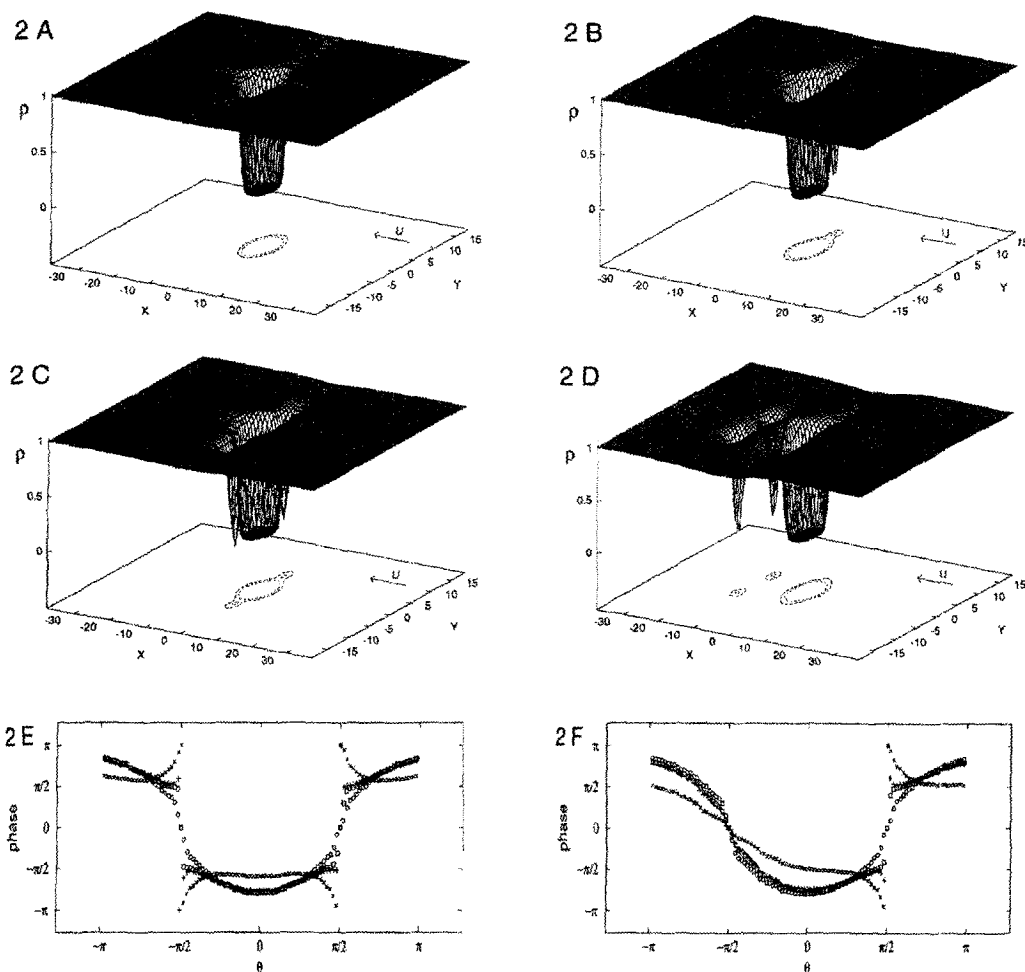


Fig. 2. – États stationnaires : stable (A), instable à un vortex (B), instable à deux vortex (C). La surface indique la densité du fluide autour du disque ($M = 0,24, \xi/d = 0,1$). (D) représente le résultat de l'évolution sous l'ESNL de l'état (C) soumis à une petite perturbation. Les figures (E) et (F) montrent la phase du champ complexe ψ à la surface du disque en fonction de l'angle polaire θ . Branche non symétrique (A), branche symétrique (B).

$M = 0,4286$ (o), $M = 0,41$ (□), $M = 0,40$ (+), $M = 0,30$ (×).

La sortie du vortex produit une discontinuité de la phase à $M_n \sim 0,405$.

Fig. 2. – Stationary states: stable (A), one vortex unstable (B), two vortices unstable (C). The surface indicates the fluid density around the cylinder ($M = 0.24, \xi/d = 0.1$). (D) Shows the result of the NLSE integration, starting from a slightly perturbed stationary (C) state. (E) and (F) display the phase of the complex field ψ at the surface of the cylinder versus the polar angle θ . Asymmetric branch (A), symmetric branch (B). $M = 0.4286$ (o), $M = 0.41$ (□), $M = 0.40$ (+), $M = 0.30$ (×). The crossing out of the vortex produces a phase discontinuity at $M_n \sim 0.405$.

Note remise le 12 juin 1997, acceptée le 16 juin 1997.

Remerciements. Nos calculs numériques ont été réalisés sur le Cray 90 de l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique. Nous remercions C. Nore et L. Tuckerman pour des discussions scientifiques.

Références bibliographiques

- Frisch T., Pomeau Y., Rica S., 1992. Transition to dissipation in a model of superflow, *Phys. Rev. Lett.*, 69, 1644.
- Ginzburg V. L., Pitaevskii L. P., 1958. On the theory of superfluidity, *Sov. Phys. JETP*, 34, 858.
- Gottlieb D., Orszag S. A., 1977. *Numerical Analysis of Spectral Methods*, SIAM, Philadelphia.
- Gross E. P., 1963. Hydrodynamics of a superfluid condensate, *J. Math. Phys.*, 4, 195.
- Hakim V., 1997. Non-linear Schrödinger flow past an obstacle in one dimension, *Phys. Rev. E*, 55, 2835.
- Klein R., Majda A. J., 1991. Self-stretching of perturbed vortex filaments, *Physica D*, 53, 267.
- Mamun C., Tuckerman L., 1995. Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow, *Phys. Fluids*, 7, 80.
- Pomeau Y., Rica S., 1993. Vitesse limite et nucléation dans un modèle de superfluide, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 316, série II, 1523.
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., 1994. *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Seydel W., 1988. *From Equilibrium to Chaos: Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Elsevier, New York.