

Classification  
 Physics Abstracts  
 1.190 — 4.150

## SOLUTION EXACTE D'UN PROBLÈME MODÈLE A TROIS CORPS. ÉTAT LIÉ

M. GAUDIN et B. DERRIDA

Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes Nucléaires, BP N° 2, 91190 Gif-sur-Yvette, France

(Reçu le 16 juillet 1975, accepté le 25 août 1975)

**Résumé.** — Le problème de l'état lié de trois particules en interaction delta à une dimension est ramené à la résolution d'un système d'équations aux différences. Dans un cas particulier qui constitue un des plus simples parmi les modèles non triviaux pour un système quantique à trois corps

$$(m_1 = m_2 = m_3; \quad g_3 = 0; \quad g_1 = g_2 < 0)$$

l'énergie de liaison de l'état fondamental est obtenue en résolvant une équation transcendante. Le résultat est cohérent avec celui de Dodd, obtenu par résolution numérique des équations de Faddeiev.

**Abstract.** — The problem of the bound state of three massive particles, interacting in one dimension via a two-body delta potential, is reduced to the solution of a system of finite difference equations. In a particular non trivial case the ground state energy is given exactly by a transcendental equation. The result agrees with Dodd's value obtained by numerical solution of Faddeiev's equations.

**1. Position du problème général.** — Notre point de départ est l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde  $\Psi(x_1, x_2, x_3)$  de trois particules de masses  $m_1, m_2, m_3$ , en interaction mutuelle de type delta à une dimension

$$\begin{aligned} - \left( \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{1}{m_3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right) - E\Psi + \\ + (g_1 \delta(x_2 - x_3) + g_2 \delta(x_1 - x_3) \\ + g_3 \delta(x_2 - x_1)) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Nous limitant dans ce travail à la question de l'état lié, nous ne traitons pas le cas où les constantes d'interaction  $g_1, g_2, g_3$  seraient positives. On sait que l'éq. (1) est aussi celle d'un problème d'optique ondulatoire à deux dimensions. Le problème de diffusion (scattering) des trois particules quantiques décrites par (1) est en effet équivalent à un problème de diffraction d'une onde optique incidente par trois lames concourantes infiniment minces et réfringentes. Mais ceci correspond à proprement parler au cas d'énergie positive qui sera traité ailleurs. Renvoyant pour les travaux antérieurs aux auteurs cités [1-5], nous exposons en évitant au maximum les calculs le détail de la solution d'un cas particulier non trivial.

Après séparation du mouvement du centre de masse,  $\Psi$  est une fonction des coordonnées relatives et peut s'écrire symétriquement en introduisant des coordonnées polaires  $\rho, \theta$ ; on définit les angles  $\theta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) par les expressions

$$\begin{aligned} \theta_1 = 0, \quad \text{tg } \theta_2 = \sqrt{\frac{mm_3}{m_1 m_2}}, \\ \text{tg } \theta_3 = - \sqrt{\frac{mm_2}{m_1 m_3}} \end{aligned} \quad (2)$$

avec  $m = m_1 + m_2 + m_3$ .  
On a les inégalités

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2} < \theta_3 < \pi. \quad (3)$$

En coordonnées polaires les distances relatives s'écrivent sous la forme

$$(x_j - x_k) = \rho \sin(\theta - \theta_i) \sqrt{\frac{m_j + m_k}{m_j m_k}} \\ (i, j, k) = (1, 2, 3). \quad (4)$$

Au lieu des constantes  $g_i$ , on introduit les couplages  $\lambda_i$  tels que

$$\lambda_i = -g_i \sqrt{\frac{m_j m_k}{m_j + m_k}} > 0. \quad (5)$$

Introduisons un indice de sommation  $\alpha$  variant de 1 à 6 tel que

$$\lambda_{\alpha+3} = \lambda_\alpha, \quad \theta_{\alpha+3} = \theta_\alpha + \pi, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (6)$$

nous obtenons, après séparation, l'équation d'onde à deux dimensions

$$\Delta_2 \psi - q^2 \psi + \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^6 \lambda_\alpha \delta(\theta - \theta_\alpha) \psi = 0, \quad (7)$$

pour la fonction intrinsèque  $\psi(\rho, \theta)$  d'énergie de liaison

$$B = -q^2.$$

On ne connaît de solution à l'éq. (1) que dans ce qu'on peut appeler le cas trivial, ou cas sans diffraction, réalisé lorsque les couplages et les masses vérifient les deux relations

$$\frac{g_1}{m_2 + m_3} = \frac{g_2}{m_1 + m_3} = \frac{g_3}{m_1 + m_2} = -2a. \quad (8)$$

La fonction d'onde de l'état lié est alors la suivante

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \dots e^{-a(m_1 m_2 |x_1 - x_2| + m_1 m_3 |x_1 - x_3| + m_2 m_3 |x_2 - x_3|)} \quad (9)$$

et correspond à l'énergie de liaison

$$q^2 = a^2(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)(m_2 + m_3) = \frac{|g_1 g_2 g_3|}{8a}. \quad (10)$$

Dans le cas général on sait réduire le problème de trouver une fonction vérifiant (7) à la résolution d'un système d'équations aux différences finies. Soit  $\varepsilon$  la parité de l'état  $\psi$  qui, au vu de l'hamiltonien, est un bon nombre quantique

$$\varepsilon \psi(r, \theta) = \psi(r, \theta + \pi). \quad (11)$$

Etendons la définition de  $\psi$  aux valeurs négatives de  $r$  par la formule

$$\psi(-r, \theta) = \varepsilon \psi(r, \theta) = \psi(r, \theta + \pi). \quad (12)$$

Posons

$$\left. \begin{aligned} \psi_\alpha(r) &= \psi(r, \theta_\alpha) \\ r_{\alpha\beta} &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta_{\alpha\beta})^{1/2} \\ \theta_{\alpha\beta} &= |\theta_\alpha - \theta_\beta| \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

On notera

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\alpha+3}(r) &= \psi_\alpha(-r) = \varepsilon \psi_\alpha(r) \\ r_{\alpha,\beta+3}(r, r') &= r_{\alpha\beta}(r, -r') \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Il est facile d'établir que l'éq. (7) augmentée des conditions à l'infini est équivalente aux équations intégrales couplées

$$\psi_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^3 \lambda_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(qr_{\alpha\beta}) \psi_\beta(r') dr', \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (15)$$

où  $K_0(z)$  désigne la fonction de Hankel décroissant en  $e^{-|z|}$  à l'infini ( $z$  réel). On a montré [9] que l'opérateur intégral défini par (15) contracte les fonctions de la classe  $C_{\xi=1/\sqrt{2}}$  ainsi définie

$$\psi_\alpha(r) \in C_{\xi_\alpha},$$

si

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{q\rho} \log \psi_\alpha(\rho) = -\xi_\alpha. \quad (16)$$

On pose  $\xi_\alpha = \sin \gamma_\alpha$  et par conséquent

$$\frac{\pi}{4} < \gamma_\alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

On définit la transformée

$$\chi_\alpha(\omega) = \int_0^\infty \psi_\alpha(r) e^{-qr \sin \omega} dr. \quad (18)$$

Considérée comme fonction analytique de  $\omega$ , elle est sûrement holomorphe dans la région

$$\text{Re} \sin \omega + \sin \gamma_\alpha > 0$$

et, sur l'axe réel, dans l'intervalle

$$-\gamma_\alpha < \omega < \gamma_\alpha + \pi. \quad (19)$$

On montre alors que l'équation intégrale (15) est équivalente aux trois équations aux différences finies

$$\begin{aligned} [\chi_\alpha(\omega) + \varepsilon \chi_\alpha(\omega + \pi)] (2q \cos \omega - \lambda_\alpha) &= \\ = \sum_{\beta(\neq \alpha)} \lambda_\beta [\chi_\beta(\omega + \theta_{\alpha\beta}) + \varepsilon \chi_\beta(\omega + \pi - \theta_{\alpha\beta})] \end{aligned} \quad (20)$$

relations valides dans tout le domaine de prolongement des fonctions  $\chi_\alpha$  à partir de l'intervalle réel

$$-\gamma < \omega < \gamma; \quad \gamma = \text{Min}_\alpha \gamma_\alpha. \quad (21)$$

Dans le cas des masses égales et de la parité positive, on a

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= 0, & \theta_2 &= \frac{\pi}{3}, & \theta_3 &= \frac{2\pi}{3}, \\ \theta_{23} &= \frac{\pi}{3}, & \varepsilon &= +1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

et le système (20) prend la forme

$$\begin{aligned} [\chi_1(\omega) + \chi_1(\omega + \pi)] (2q \cos \omega - \lambda_1) &= \\ = \lambda_2 \left[ \chi_2 \left( \omega + \frac{\pi}{3} \right) + \chi_2 \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \\ + \lambda_3 \left[ \chi_3 \left( \omega + \frac{\pi}{3} \right) + \chi_3 \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

avec les deux autres équations obtenues par permutation circulaire des indices.

L'objet du présent article est d'exposer la solution correspondant au cas particulier non trivial

$$m_1 = m_2 = m_3; \quad g_1 = g_2 \neq 0; \quad g_3 = 0.$$

Rappelons que le cas trivial correspond ici à  $g_1 = g_2 = g_3$ , puisque les masses sont égales. Donnons un raccourci de la solution dans ce dernier cas. On a  $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3$ . Prenant comme fonction inconnue

$$f(\omega) = \chi\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \chi\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (24)$$

le problème trivial consisterait à trouver une solution paire de l'équation aux différences issue de (23)

$$f\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2q \cos \omega + 1}{2q \cos \omega - 1} f(\omega) = 0 \quad (25)$$

telle que  $f(\omega)$  soit holomorphe dans l'intervalle réel

$$-\gamma - \frac{\pi}{3} < \omega < \gamma + \frac{\pi}{3} \quad (26)$$

et tende vers zéro à l'infini. La représentation intégrale (18) et l'équation fonctionnelle (25) permettent de décrire les propriétés analytiques essentielles de  $f$ . Donnons brièvement le résultat : l'abscisse de convergence est évidemment telle que  $\cos \gamma = 1/2q$ . Pour la valeur  $\gamma = \pi/3$ , c'est-à-dire  $q = 1$ ,  $f(\omega)$  est  $2\pi$ -périodique et méromorphe et, de fait, proportionnelle à  $(2 \cos \omega + 1)^{-1}$ . On en déduit

$$\chi(\omega) = \left( \sin \omega + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-1}$$

qui est la transformée de  $\exp\left(-\rho \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ , la fonction d'onde du cas trivial étant d'après (9)

$$\psi(\rho, \theta) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \rho \left\{ \left| \sin \theta \right| + \left| \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right| + \left| \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right| \right\} \right] \quad (27)$$

Nous constaterons que la solution du cas non trivial, que nous donnons maintenant, est beaucoup plus complexe, bien que l'équation aux différences soit très semblable à (25).

**2. Méthode de solution de l'équation aux différences.**

— Nous traitons désormais le cas particulier défini par le choix :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0$$

et nous nous restreignons à la détermination de l'énergie de l'état fondamental, pour laquelle on

calcule aisément une borne variationnelle avec la fonction d'essai  $\exp(-\alpha |x_1 - x_3| - \alpha |x_2 - x_3|)$ ; on trouve  $q^2 > \frac{1}{2}$ . Sa parité est positive. Nous avons  $\chi_1(\omega) \equiv \chi_2(\omega)$  et nous posons

$$f(\omega) = \chi_1\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \chi_1\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right). \quad (28)$$

L'éq. (23) nous donne la relation

$$f\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = x(\omega) f(\omega) \quad (29)$$

avec

$$x(\omega) = \frac{\cos \omega}{\cos \omega - \frac{1}{2q}}. \quad (30)$$

Le problème consiste à trouver une fonction analytique réelle, paire, solution de l'équation aux différences (29), nulle à l'infini et holomorphe dans l'intervalle

$$-\frac{\pi}{3} - \gamma < \omega < \frac{\pi}{3} + \gamma. \quad (31)$$

Ces propriétés résultent de la représentation (18). La fonction sera aussi positive sur l'axe réel, puisque la fonction d'onde du fondamental est positive.

D'après (18),  $f$  est holomorphe dans l'intersection des domaines

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sin \left( \omega + \frac{\pi}{3} \right) + \sin \gamma > 0, \\ \operatorname{Re} \sin \left( \omega + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \gamma > 0, \end{aligned} \quad (32)$$

qui contient donc toute la bande

$$-\frac{\pi}{3} \leq \operatorname{Re} \omega \leq +\frac{\pi}{3}. \quad (33)$$

Pour définir l'abscisse de convergence  $\gamma$  on a évidemment

$$\cos \gamma = \frac{1}{2q} \quad (34)$$

avec les inégalités

$$\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{3},$$

la première résultant de la borne variationnelle.

A l'aide de la relation fonctionnelle (29) on montre facilement que  $f$  est méromorphe dans le plan, les pôles étant situés sur l'axe réel aux abscisses

$$\pm \gamma_n, \quad \gamma_n = \gamma + n \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (35)$$

l'ordre de multiplicité étant  $|[n/6] + 1|$ .

Par analogie avec la théorie des équations différentielles à coefficients périodiques, on est conduit à itérer l'éq. (29) de façon à former une équation d'incrément  $2\pi$ . On obtient

$$f(\omega + 2\pi) + f(\omega - 2\pi) = X(\omega) f(\omega) \quad (36)$$

où la fonction  $X$ ,  $\pi/3$ -périodique, a la définition suivante :

$$X(\omega) = \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 \end{vmatrix} + 2 \quad (37)$$

où l'on a posé

$$x_n = x(\omega_n), \quad \omega_n = \omega + n \frac{\pi}{3}. \quad (38)$$

Le calcul donne

$$X(\omega) = 2 \frac{\Delta(\omega) + \Delta_0}{\Delta(\omega) - \Delta_0}, \quad (39)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= 9 \cos^2 \gamma - \cos^2 3\omega, \\ \Delta_0 \equiv \Delta(\gamma) &= 16 \cos^4 \gamma \left( \frac{3}{2} - \cos^2 \gamma \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Ce résultat montre que la solution associée à l'état fondamental ne peut être  $2\pi$ -périodique, contrairement à ce qui se passe pour le cas trivial où l'on obtient après calcul analogue sur l'éq. (25),  $X \equiv 2$ . Cependant la valeur  $\cos \gamma = \sqrt{\frac{3}{2}}$  correspondant à  $q = 1/\sqrt{6}$  est admissible pour le problème de scattering (état lié à deux particules diffusé par la troisième) et il existe pour cette valeur exceptionnelle une solution périodique facile à construire.

Toujours guidé par l'analogie avec les équations différentielles, on montre que la solution  $f(\omega)$  est une somme de deux fonctions  $g(\omega)$  et  $\tilde{g}(\omega)$

$$f(\omega) = g(\omega) + \tilde{g}(\omega) \quad (41)$$

admettant des facteurs de périodicité tels que

$$\left. \begin{aligned} g(\omega + 2\pi) &= \eta^{-1}(\omega) g(\omega) \\ \tilde{g}(\omega + 2\pi) &= \eta(\omega) \tilde{g}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

avec

$$X(\omega) = \eta(\omega) + \eta^{-1}(\omega) \quad (43)$$

c'est-à-dire

$$\eta(\omega) = \frac{\sqrt{\Delta(\omega)} + \sqrt{\Delta_0}}{\sqrt{\Delta(\omega)} - \sqrt{\Delta_0}} \quad (44)$$

de sorte que l'éq. (36) est vérifiée.

Le multiplicateur  $\eta$  contient l'irrationalité  $\sqrt{\Delta}$  qui joue un rôle essentiel dans toute la suite. Si l'on remarque que la surface de Riemann de la courbe algébrique en  $e^{i\omega}$  définie par  $y = \pm \sqrt{\Delta}$  possède deux feuillettes, il existe plusieurs dissections admissibles du plan complexe  $\omega$  pour que  $\eta(\omega)$  soit monovalué dans le plan ainsi coupé. Nous avons choisi le système de coupures qui rend le plus aisé l'étude du comportement asymptotique de  $f$  au voisinage de  $\omega = \infty$ .

Nous coupons donc le plan par les segments  $C_n$

$$C_n : \Re \omega = n \frac{\pi}{3}, \quad -\lambda < \Im \omega < +\lambda \quad (45)$$

où l'on a défini  $\lambda > 0$  de sorte que l'on ait

$$3 \cos \gamma = \cosh 3\lambda. \quad (46)$$

La fonction  $\sqrt{\Delta} \equiv \sqrt{\cosh^2 3\lambda - \cos^2 3\omega}$  est alors une fonction impaire de période  $2\pi/3$ , vérifiant

$$\sqrt{\Delta(-\omega)} = \sqrt{\Delta\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{\Delta(\omega)} \quad (47)$$

la branche choisie étant positive dans le premier feuillet sur les intervalles  $[0, \pi/3]$ ,  $[2\pi/3, \pi]$ , ... Elle est réelle le long des coupures. Au voisinage de

$$\Im \omega = +\infty,$$

nous utiliserons

$$\sqrt{\Delta} = \frac{i}{2} e^{-3i\omega} \sqrt{(1 - e^{6\lambda+6i\omega})(1 - e^{-6\lambda+6i\omega})}. \quad (48)$$

Nous verrons que l'irrationalité qui est celle de  $\eta$  sera aussi celle des fonctions  $g$  et  $\tilde{g}$ . Or nous voulons construire une fonction  $f$  méromorphe, donc uniforme. Soient  $\omega$  et  $\tilde{\omega}$  deux points de même affixe dans le plan  $\omega$  mais appartenant à des feuillettes différents de la surface de Riemann, nous prendrons

$$\tilde{g}(\tilde{\omega}) = g(\omega). \quad (49)$$

D'après un théorème classique, la condition d'uniformité (49) est équivalente aux relations sur les coupures

$$\begin{aligned} g\left(\frac{n\pi}{3} + iv \pm 0\right) &= \tilde{g}\left(\frac{n\pi}{3} + iv \mp 0\right) \\ -\lambda \leq v \leq +\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (50)$$

Le choix (49) est compatible avec (42) puisque la définition de  $\eta$  entraîne

$$\tilde{\eta}(\omega) = \eta^{-1}(\omega).$$

L'analyse conduit à chercher  $g(\omega)$  comme solution paire de l'équation

$$g\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + g\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = x(\omega) \tilde{g}(\omega) \quad (51)$$

qui entraîne

$$\tilde{g}\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \tilde{g}\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = x(\omega) g(\omega),$$

et par conséquent (29). La solution  $g$  devra être méromorphe dans le plan coupé, et en fait sur l'un et l'autre feuillet. Les seules singularités non polaires à distance finie étant les points de ramification de  $\sqrt{\Delta}$ . Les seuls pôles de  $g$  sont d'ailleurs donnés par (35).

Par itération de (51) on obtient

$$\left. \begin{aligned} g(\omega + 2\pi) &= P_0(\omega) \tilde{g}\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - P_1(\omega) g(\omega) \\ \tilde{g}(\omega + 2\pi) &= P_0(\omega) g\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - P_1(\omega) \tilde{g}(\omega) \end{aligned} \right\} (52)$$

où les fonctions rationnelles périodiques  $P_0, P_1$  sont définies par la récurrence

$$P_{n+1} + P_{n-1} + X\delta_{n0} = x_n P_n \quad -6 \leq n \leq +6$$

avec

$$P_6 = P_{-6} = 0, \quad P_5 = P_{-5} = 1. \quad (53)$$

De (52) et (42) on déduit

$$\tilde{g}\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) / g(\omega) = \frac{P_1(\omega) + \eta^{-1}}{P_0(\omega)} \equiv \frac{P_0\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)}{P_1(\omega) + \eta(\omega)}$$

$$g\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) / \tilde{g}(\omega) = \frac{P_1(\omega) + \eta}{P_0(\omega)} \equiv \frac{P_0\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)}{P_1(\omega) + \eta^{-1}}. \quad (54)$$

On en déduit aussi que le produit  $g(\omega) \tilde{g}(\omega)$ , qui est uniforme et méromorphe dans le plan  $\omega$ , est proportionnel à  $P_0(\omega)$ , à un facteur  $\pi/3$ -périodique près. Calculant explicitement  $P_0$  à partir de (53), on obtient

$$P_0(\omega) = \frac{R(\omega)}{\cos^2 3\gamma - \cos^2 3\omega} \quad (55)$$

avec

$$R(\omega) = 2(\cos \omega - \cos \gamma) \times (8 \cos^3 \omega - 9 \cos \omega - 3 \cos \gamma). \quad (56)$$

Comme  $g$  n'est défini pour l'instant qu'à un facteur méromorphe  $\pi/3$ -périodique près, nous posons

$$g(\omega) \tilde{g}(\omega) = R(\omega) C(\omega) \quad (57)$$

avec  $C$  méromorphe ;

$$C(\omega) = C\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right).$$

Introduisons le quotient

$$E(\omega) = g(\omega) / \tilde{g}(\omega). \quad (58)$$

$E$  est méromorphe sur l'un et l'autre feuillet et vérifie en vertu de (54) et (58) les seules relations

$$E(\omega) \tilde{E}(\omega) = 1 \Leftrightarrow E(\omega) E(\tilde{\omega}) = 1, \quad \omega \in C_n \quad (59)$$

$$E(\omega) E\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{P_1(\omega) + \eta(\omega)}{P_1(\omega) + \eta^{-1}(\omega)} \equiv h(\omega) \quad (60)$$

$$h(\omega) = \frac{A(\omega) - \xi \sqrt{\Delta(\omega)}}{A(\omega) + \xi \sqrt{\Delta(\omega)}}. \quad (61)$$

Le calcul explicite nous donne

$$A(\omega) \equiv \cos \omega (8 \cos^3 \omega - 9 \cos \omega - 3 \cos \gamma) + \sqrt{3} \sin \omega (\cos \omega - \cos \gamma) (8 \cos^2 \omega - 3) \quad (62)$$

$$\xi = \sqrt{6 - 4 \cos^2 \gamma} = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{4 \cos^2 \gamma} \quad (63)$$

avec les propriétés, pénibles à vérifier directement, mais découlant de celles des  $P_n$  :

$$A(-\omega) \equiv A\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) \quad (64)$$

$$A^2(\omega) - \xi^2 \Delta(\omega) \equiv R(\omega) R\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right). \quad (65)$$

Avec la normalisation définie par (57) on a

$$g(\omega) g\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) = (A(\omega) - \xi \sqrt{\Delta(\omega)}) C(\omega) \quad (66)$$

qui, à l'aide de (64), permet de vérifier tout de suite la récurrence (51).

Nous aurons donc la solution générale de notre équation aux différences si nous savons construire la solution générale des relations (59), (60).

Définissons la fonction  $e(\omega)$

$$e(\omega) = \frac{h(\omega) h\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}{h\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) h\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right)} \quad (67)$$

c'est-à-dire, d'après (61)

$$e(\omega) = \frac{A_0 - \xi \sqrt{\Delta}}{A_0 + \xi \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{A_1 - \xi \sqrt{\Delta}}{A_1 + \xi \sqrt{\Delta}} \times \frac{A_{-1} + \xi \sqrt{\Delta}}{A_{-1} - \xi \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{A_{-2} + \xi \sqrt{\Delta}}{A_{-2} - \xi \sqrt{\Delta}} \quad (68)$$

avec la notation  $A_n = A(\omega_n)$ .

On déduit de (67) et (68) les relations

$$\left. \begin{aligned} e(\omega) e(\omega_1) &= \frac{h^3(\omega)}{h(\omega) h(\omega_2) h(\omega_{-2})} \\ e(\omega) \tilde{e}(\omega) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Supposons qu'on sache construire la solution de l'équation fonctionnelle

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\omega) \varphi(\omega_1) &= h(\omega) h(\omega_2) h(\omega_{-2}) \\ \varphi(\omega) \tilde{\varphi}(\omega) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

toute la difficulté consiste à trouver une de ces fonctions  $\varphi$  pour laquelle la fonction  $(e\varphi)^{1/3}$  soit uniforme et méromorphe sur l'un et l'autre feuillet. Si l'on appelle  $E_0(\omega)$  une solution méromorphe des relations

$$\left. \begin{aligned} E_0(\omega) \tilde{E}_0(\omega) &= 1 \\ E_0(\omega) E_0(\omega_1) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

la solution cherchée pour  $E$  s'écrira

$$E(\omega) = E_0(\omega) (e(\omega) \varphi(\omega))^{1/3}. \quad (72)$$

La section suivante est consacrée à la construction de la fonction  $\varphi(\omega)$  telle que  $\varphi$  et  $E$  soient méromorphes sur la surface constituée des deux feuillets, définie par la dissection  $C_n, n \in \mathbb{Z}$ .

Pour des fonctions comme  $E_0$  qui est  $2\pi/3$ -périodique, ou comme  $e(\omega)$  qui est  $2\pi$ -périodique, méromorphe signifie méromorphe sur la surface de Riemann de la courbe algébrique  $(e^{3i\omega}, \sqrt{\Delta})$  dans le premier cas, ou de la courbe  $(e^{i\omega}, \sqrt{\Delta})$  dans le second. Mais pour des fonctions comme  $\varphi$  ou  $E$  qui n'ont pas de période, il faudrait introduire la surface de Riemann de la courbe transcendante  $(\omega, \sqrt{\Delta})$  pour parler de fonctions méromorphes. Nous dirons plus simplement méromorphe et uniforme sur les deux feuillets, le point à l'infini étant exclu. Nous appellerons  $\hat{S}$  cette surface privée des points images de  $\omega = \infty$ .

Nous verrons plus loin que l'uniformisation elliptique de la courbe  $(e^{3i\omega}, \sqrt{\Delta})$  peut être introduite avantageusement pour résoudre les équations du genre (71) et sera utile pour le calcul numérique final. En ce cas les fonctions uniformes et méromorphes sur  $\hat{S}$  s'expriment à l'aide des fonctions  $\theta$ . Si l'on inclut le point à l'infini, les fonctions méromorphes sur  $\hat{S}$  sont tout simplement les fonctions rationnelles des deux variables  $e^{3i\omega}$  et  $\sqrt{\Delta}$ .

**3. Factorisation de  $\varphi$ .** — Puisque nous avons à construire une fonction  $\varphi$  telle que  $(e\varphi)^{1/3}$  soit uniforme, il est nécessaire de contrôler les pôles et zéros des diverses fonctions  $e, \varphi$ , et même de connaître exactement leur multiplicité. Commençons par  $h$  définie par (61); il suffit de se placer dans le premier feuillet. En vertu de (65), il existe dans une bande de largeur  $2\pi$ , 16 zéros ou pôles de  $h$  qui sont les 8 racines de  $R(\omega)$  et les 8 racines de  $R\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)$ . D'après (56), on a à résoudre une équation du troisième degré en  $\cos \omega$ . Si l'on pose

$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos 3\delta \quad (73)$$

les racines de  $R$  sont

$$\cos \omega = \cos \gamma, \quad (74)$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \delta, \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \left( \delta \pm \frac{2\pi}{3} \right).$$

Si l'on se restreint légitimement d'après (34) à l'intervalle de variation

$$\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{3},$$

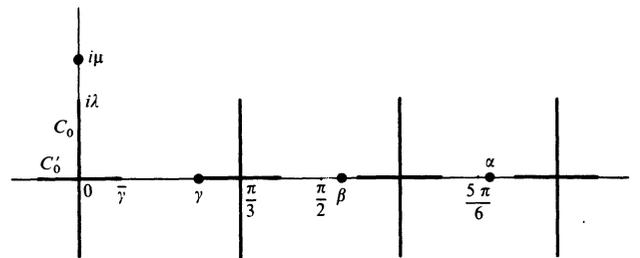
on constate que trois racines sont associées à des angles réels, soient  $\gamma, \beta, \alpha$ , et la quatrième est associée à un angle imaginaire pur, soit  $i\mu$ . On a donc

$$R(\omega) \equiv 16(\cos \omega - \cos \gamma) (\cos \omega - \cos \beta) \times (\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cosh \mu). \quad (75)$$

La localisation peut être précisée de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} \mu > \lambda, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \gamma_1, \\ \frac{5\pi}{6} < \alpha < \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

illustrée par la figure ci-dessous :



On vérifie aisément sur la définition (62) de  $A(\omega)$  les inégalités

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) < 0, \quad A(\beta) > 0, \quad A(\gamma) < 0, \\ \frac{1}{i} A(i\mu) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

On en déduit que dans le premier feuillet  $h(\omega)$  a pour zéros

$$-\gamma, \quad \gamma - \frac{\pi}{3}, \quad \pm i\mu, \quad \pm i\mu - \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \quad (78)$$

et pour pôles

$$\left. \begin{aligned} \gamma, \quad -\gamma - \frac{\pi}{3}, \quad \pm \alpha, \quad \pm \beta, \\ \pm \alpha - \frac{\pi}{3}, \quad \pm \beta - \frac{\pi}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Pôles et zéros sont échangés dans le second feuillet.

Dans une notation symbolique assez claire nous écrivons

$$h(\omega) \sim \frac{(\cos \omega - \cosh \mu) (\cos \omega_1 - \cosh \mu)}{(\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cos \beta) (\cos \omega_1 - \cos \alpha) (\cos \omega_1 - \cos \beta)} \times \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega + \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\omega - \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \gamma)}, \quad (80)$$

ce qui signifie que  $h(\omega)$  a les mêmes zéros et pôles que le second membre dans le premier feuillet uniquement.

Passons maintenant à l'étude du second membre de la relation (70) pour  $\varphi$ . Le produit  $h(\omega) h(\omega_2) h(\omega_{-2})$  est  $2\pi/3$ -périodique et doit s'exprimer rationnellement en fonction de  $\sqrt{\Delta}$ ,  $\cos 3\omega$ ,  $\sin 3\omega$ .

Dans ce but, remarquons l'identité suivante qui résulte directement de (54) ou (65) et de la relation

$$g(\omega + 2\pi) = \eta^{-1} g(\omega) :$$

$$\frac{A_1 + \xi \sqrt{\Delta}}{A_0 - \xi \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{A_3 + \xi \sqrt{\Delta}}{A_2 - \xi \sqrt{\Delta}} \cdot \frac{A_5 + \xi \sqrt{\Delta}}{A_4 - \xi \sqrt{\Delta}} \equiv \frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta_0}}{\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta_0}}. \quad (81)$$

Si l'on définit  $a(\omega)$  par la relation

$$(A_0 - \xi \sqrt{\Delta}) (A_2 - \xi \sqrt{\Delta}) (A_4 - \xi \sqrt{\Delta}) \equiv (\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta_0}) a(\omega), \quad (82)$$

on déduit donc de (81) les propriétés

$$a\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) = -a(\omega) = a(-\omega) \quad (83)$$

et l'on peut écrire

$$h(\omega) h(\omega_2) h(\omega_{-2}) \equiv \eta(\omega) \frac{a(\omega)}{\tilde{a}(\omega)}. \quad (84)$$

A l'aide de (80) on voit que le premier membre de (84) a les mêmes zéros et pôles dans le premier feuillet que l'expression

$$\eta(\omega) \frac{\cos 6\omega - \cosh 6\mu}{(\cos 6\omega - \cos 6\alpha) (\cos 6\omega - \cos 6\beta)} \quad (85)$$

et, dans le second feuillet que

$$\tilde{\eta}(\omega) \frac{(\cos 6\omega - \cos 6\alpha) (\cos 6\omega - \cos 6\beta)}{(\cos 6\omega - \cosh 6\mu)}.$$

On en déduit la factorisation suivante

$$\frac{a(\omega)}{\tilde{a}(\omega)} \equiv \eta_\alpha(\omega) \eta_\beta(\omega) \eta_\mu(\omega), \quad (86)$$

avec les définitions

$$\left. \begin{aligned} \eta_\alpha(\omega) &= \frac{\sin 3\alpha \sqrt{\Delta(\omega)} + \sin 3\omega \sqrt{\Delta(\alpha)}}{\sin 3\alpha \sqrt{\Delta(\omega)} - \sin 3\omega \sqrt{\Delta(\alpha)}} \\ \eta_\mu(\omega) &= \frac{\sinh 3\mu \sqrt{\Delta(\omega)} - \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} \sin 3\omega}{\sinh 3\mu \sqrt{\Delta(\omega)} + \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} \sin 3\omega} \end{aligned} \right\} (87)$$

et les inégalités

$$\sqrt{\Delta(\alpha)} > 0, \quad \sqrt{\Delta(\beta)} < 0, \quad \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} > 0. \quad (88)$$

Les quotients  $\eta_\alpha, \eta_\beta, \eta_\mu$  ont les propriétés de méromorphie sur  $\hat{S}$ , de périodicité  $\pi/3$  et vérifient

$$\eta_\alpha(\omega) \tilde{\eta}_\alpha(\omega) = 1, \quad \eta_\alpha(\omega) = \eta_\alpha(-\omega), \quad \text{etc...} \quad (89)$$

On vérifie sur la définition que, dans le premier feuillet  $\eta_\alpha(\omega)$  est sans zéro et a les pôles de

$$(\cos 6\omega - \cos 6\alpha)^{-1}.$$

*Idem* pour  $\eta_\beta$ . Par contre  $\eta_\mu(\omega)$  a les seuls zéros de  $(\cos 6\omega - \cosh 6\mu)$ . Pôles et zéros s'échangent dans le second feuillet.

Nous obtiendrons donc la solution de (70) en cherchant quatre fonctions,  $\varphi_\alpha, \dots$  méromorphes sur  $\hat{S}$ , solutions des équations

$$\varphi_\alpha(\omega) \varphi_\alpha(\omega_1) = \eta_\alpha(\omega), \quad \varphi_\alpha(\omega) \tilde{\varphi}_\alpha(\omega) = 1. \quad (90)$$

*Idem* pour  $\varphi_\beta, \varphi_\mu$ ; la quatrième pour  $\varphi_0$  est analogue

$$\varphi_0(\omega) \varphi_0(\omega_1) = \eta(\omega), \quad \varphi_0(\omega) \tilde{\varphi}_0(\omega) = 1. \quad (91)$$

La solution générale de (70) est alors

$$\varphi(\omega) = a_0(\omega) \varphi_0(\omega) \varphi_\alpha(\omega) \varphi_\beta(\omega) \varphi_\mu(\omega) \quad (92)$$

avec  $a_0(\omega)$  méromorphe sur  $\hat{S}$  et vérifiant

$$a_0(\omega) a_0(\omega_1) = 1, \quad a_0(\omega) \tilde{a}_0(\omega) = 1. \quad (93)$$

4. **Uniformité de  $E$  sur  $\hat{S}$ .** — D'après (72) il nous faut construire une fonction  $E$  méromorphe sur  $\hat{S}$  et, par conséquent uniforme, c'est-à-dire que les zéros et les pôles du produit  $e(\omega) \varphi(\omega)$  doivent être

triples sur l'un et l'autre feuillet. A l'aide de la définition (67) et du résultat (80), on voit que  $e(\omega)$  a dans le premier feuillet les pôles et les zéros de l'expression rationnelle :

$$\left( \frac{\cos \omega - \cosh \mu}{(\cos \omega - \cos \alpha)(\cos \omega - \cos \beta)} \right)^3 \cdot \frac{(\cos 3 \omega - \cos 3 \alpha)(\cos 3 \omega - \cos 3 \beta)}{(\cos 3 \omega - \cosh 3 \mu)} \times \\ \times \left( \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_{-1} + \gamma) \sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\omega_{-1} - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \gamma)} \right)^2 \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_2 + \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_{-2} - \gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \gamma) \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_{-2} + \gamma)}. \quad (94)$$

Donc, en ce qui concerne les pôles ou zéros en  $\pm \alpha$ ,  $\pm \beta$ ,  $\pm i\mu$ , le problème de la multiplicité triple sera résolu, si nous construisons  $\varphi_\alpha$ , solution de (90), de sorte que  $\varphi_\alpha$  ait dans le premier feuillet les seuls pôles de  $(\cos 3 \omega - \cos 3 \alpha)^{-1}$  et dans le second feuillet les seuls zéros de  $(\cos 3 \omega - \cos 3 \alpha)$ ; de même

$$\varphi_\beta \sim (\cos 3 \omega - \cos 3 \beta)^{-1}, \\ \varphi_\mu \sim (\cos 3 \omega - \cosh 3 \mu).$$

Puisque les  $\eta_\alpha$  ont la période  $\pi/3$ , il résulte de (90) que  $\varphi_\alpha$ ,  $\varphi_\beta$ ,  $\varphi_\mu$  ont la période  $2\pi/3$ . Pour résoudre (90) une méthode très valable consisterait à uniformiser la courbe  $(e^{3i\omega}, \sqrt{\Delta})$ . Mais comme cette uniformisation ne semble pas pouvoir être utilisée d'un bout à l'autre de ce problème, il est plus cohérent et aussi simple à ce point de donner une représentation de  $\varphi_\alpha$  dans la variable  $\omega$ . Une méthode très générale consiste à introduire l'intégrale de troisième espèce [7]

$$F_b(\omega) = \int_{\pi/6}^b \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} \frac{6 \sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega}. \quad (95)$$

On montre aisément que la fonction

$$\phi_b(\omega) = \exp \{ \sqrt{\Delta(\omega)} F_b(\omega) \} \quad (96)$$

est méromorphe sur  $\hat{S}$ . Analysant les parties singulières de  $F_b(\omega)$ , on déduit que

$$\phi_b(\omega) \sim \frac{\cos 3 \omega + \cos 3 b}{\cos 3 \omega - \cos 3 b}. \quad (97)$$

On a les propriétés :

$$\phi_b(\omega) = \phi_b(-\omega) = \phi_b\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \phi_b(\omega) \phi_b(\omega_1) = 1, \quad \phi_b(\omega) \tilde{\phi}_b(\omega) = 1. \quad (98)$$

Nous avons obtenu les solutions suivantes dont on vérifie facilement qu'elles satisfont les relations (90)

$$\varphi_\alpha(\omega) = \frac{1}{i} \frac{\sin 3 \alpha \sqrt{\Delta} + \sin 3 \omega \sqrt{\Delta(\alpha)}}{\sinh 3 \lambda \sqrt{\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \alpha}} \cdot \exp \left\{ 3 \sqrt{\Delta} \int_{5\pi/6}^\alpha \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega} \right\} \\ \varphi_\beta(\omega) = \frac{1}{i} \frac{\sin 3 \beta \sqrt{\Delta} + \sin 3 \omega \sqrt{\Delta(\beta)}}{\sinh 3 \lambda \sqrt{\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \beta}} \cdot \exp \left\{ 3 \sqrt{\Delta} \int_{\pi/2}^\beta \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega} \right\} \\ \varphi_\mu(\omega) = \frac{\sinh 3 \mu \sqrt{\Delta} - \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} \sin 3 \omega}{\sinh 3 \lambda \sqrt{\cosh^2 3 \mu - \cos^2 3 \omega}} \cdot \exp \left\{ -3 \sqrt{\Delta} \int_{i\lambda}^{i\mu} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega} \right\}. \quad (99)$$

Ces trois fonctions sont des solutions particulières de (90) dont l'arbitraire est essentiellement celui de la borne inférieure des intégrales. Notre principe pour les choisir est de construire des fonctions uniformes au voisinage de l'infini puisqu'il sera néces-

saire de connaître leur comportement asymptotique, et en second lieu de définir les radicaux en coupant le plan de façon à conserver la connexité du domaine où la fonction est monovaluée.

C'est pourquoi les deux radicaux

$$(\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \alpha)^{1/2} \text{ et } (\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \beta)^{1/2}$$

seront définis comme fonctions paires de période  $\pi/3$ , de sorte que  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  soient impaires. Par contre  $(\cosh^2 3 \mu - \cos^2 3 \omega)^{1/2}$  sera choisi impaire, de sorte que  $\varphi_\mu$  soit paire. Les branches seront ainsi définies :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \alpha} \Big|_{\omega=i\lambda} &= \sqrt{\Delta(\alpha)} > 0 \\ \sqrt{\cos^2 3 \omega - \cos^2 3 \beta} \Big|_{\omega=i\lambda} &= \sqrt{\Delta(\beta)} < 0 \\ \sqrt{\cosh^2 3 \mu - \cos^2 3 \omega} \Big|_{\omega=i\lambda} &= \frac{1}{i} \sqrt{\Delta(i\mu)} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

de sorte que l'on ait la normalisation

$$\varphi_\alpha(i\lambda) = \varphi_\beta(i\lambda) = \varphi_\mu(i\lambda) = 1. \quad (101)$$

Reste à construire  $\varphi_0$ , méromorphe sur  $\hat{S}$  et vérifiant (91). A cette fin on remarque que la fonction  $\log \eta(\omega)$  est uniforme dans le plan disséqué par le système de coupures en croix  $C_n \cup C'_n$

$$\left. \begin{aligned} C'_n : \left[ \gamma + (n-1)\frac{\pi}{3}, -\gamma + (n+1)\frac{\pi}{3} \right] \\ C_n : \left[ -i\lambda + n\frac{\pi}{3}, i\lambda + n\frac{\pi}{3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

avec les propriétés

$$\log \eta(\omega_1) = -\log \eta(\omega) = \log \eta(-\omega). \quad (103)$$

On vérifie tout de suite que la fonction ci-dessous est solution de l'équation récurrente (91) si  $G(\omega)$  est  $\pi/3$ -périodique

$$\varphi_0(\omega) = \exp \left\{ -\frac{3}{\pi} \log \eta(\omega) - 6 \sqrt{\Delta(\omega)} G(\omega) \right\}. \quad (104)$$

Pour déterminer  $G$  de sorte que  $\varphi_0$  soit uniforme sur  $\hat{S}$  et vérifie l'involution (91), on trouve

$$G(\omega) = \frac{3}{\pi} \int_{\bar{\gamma}}^{i\lambda} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} \frac{\sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega}. \quad (105)$$

Dans (105) le contour va de  $\bar{\gamma} = \frac{\pi}{3} - \gamma$  à  $i\lambda$  en longeant les coupures  $C_0$  et  $C'_0$  dans le premier quadrant. Le contour peut être déformé à condition de ne pas croiser le pôle de l'intégrand.  $G$  est impaire de sorte que  $\varphi_0$  est paire. On vérifie à l'aide d'un résultat classique [8] (Mushhelishvili) sur les valeurs limites d'intégrales singulières

$$\varphi_0(i\lambda) = 1. \quad (106)$$

On déduit de (101) et (106)

$$\varphi_0 \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\mu(i\lambda) = 1. \quad (107)$$

Quelles sont les multiplicités des pôles et zéros de la fonction  $\varphi$  ainsi construite ?

D'après le choix (99), en ce qui concerne les pôles et zéros d'affixe  $\pm \alpha, \pm \beta, \pm i\mu$ , nous avons

$$\frac{\varphi(\omega)}{a_0(\omega)} \sim \frac{\cos 3 \omega - \cosh 3 \mu}{(\cos 3 \omega - \cos 3 \alpha)(\cos 3 \omega - \cos 3 \beta)} \dots \quad (108)$$

et, par conséquent si  $\log a_0$  est holomorphe en ces points, nous aurons d'après (94)

$$e(\omega) \varphi(\omega) \sim \left( \frac{\cos \omega - \cosh \mu}{(\cos \omega - \cos \alpha)(\cos \omega - \cos \beta)} \right)^3 \dots, \quad (109)$$

de multiplicité triple.

Reste à examiner les points d'affixe  $\pm \gamma_n$ , où pôles et zéros de  $\varphi$  proviennent de  $\varphi_0$  et éventuellement de  $a_0$ , encore indéterminé.

En ce qui concerne  $\varphi_0$ , il suffit de calculer les parties singulières de  $\log \varphi_0$  d'après (104) et (105). Dans une notation un peu rapide mais suffisamment claire, nous écrivons

$$\left. \begin{aligned} \text{sing} \left[ \frac{3}{\pi} \log \eta(\omega) \right] &= \\ &= \frac{3}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-)^{n-1} \gamma_n \log(\omega^2 - \gamma_n^2) \\ \text{sing} [6 \sqrt{\Delta} G(\omega)] &= \\ &= \frac{3}{\pi} \left( \frac{\pi}{3} - \gamma \right) \sum_{-\infty}^{+\infty} (-)^{n-1} \log(\omega^2 - \gamma_n^2) \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Les pôles et les zéros de  $\varphi_0$  dans le plan disséqué sont donc ceux du produit formel

$$\varphi_0(\omega) \sim \prod_n (\omega^2 - \gamma_n^2)^{(-)^{n(n+1)}}. \quad (111)$$

Choisissons la fonction  $a_0(\omega)$  encore indéterminée de sorte que

$$a_0(\omega) \sim \frac{\cos 3 \omega + \cos 3 \gamma}{\cos 3 \omega - \cos 3 \gamma} \sim \prod_n (\omega^2 - \gamma_n^2)^{(-)^{n-1}}. \quad (112)$$

D'après (95)-(97) il suffit de prendre

$$a_0(\omega) = \exp \sqrt{\Delta} \int_{\pi/6}^{\gamma} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{6 \sin 6 \omega}{\cos 6 \omega' - \cos 6 \omega}. \quad (113)$$

pour que  $a_0$  soit paire, méromorphe sur  $\hat{S}$  et vérifiant (93).

Dans ces conditions, d'après (111) et (112) nous avons

$$a_0(\omega) \varphi_0(\omega) \sim \prod_n (\omega^2 - \gamma_n^2)^{(-)^n} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (114)$$

Montrons que les pôles et zéros du produit  $e(\omega) \varphi(\omega)$  ont tous une multiplicité triple.

Du fait de (109) il suffit de considérer les points  $\pm \gamma_n$  auxquels on restreindra l'équivalence  $\sim$  : de (94) on déduit

$$e(\omega) \sim \prod_{n=6m} \frac{\omega^2 - \gamma_{n+2}^2}{\omega^2 - \gamma_{n-2}^2} \cdot \left( \frac{\omega^2 - \gamma_{n-1}^2}{\omega^2 - \gamma_{n+1}^2} \right)^2 \quad (115)$$

et de (114)

$$a_0 \varphi_0 \sim \frac{\omega^2 - \gamma_{-1}^2}{\omega^2 - \gamma_1^2} \left( \frac{\omega^2 - \gamma_2^2}{\omega^2 - \gamma_{-2}^2} \right)^2 \left( \frac{\omega^2 - \gamma_{-3}^2}{\omega^2 - \gamma_3^2} \right)^3 \dots \quad (116)$$

et par conséquent

$$(ea_0 \varphi_0)^{1/3} \sim \frac{\omega^2 - \gamma_{-1}^2}{\omega^2 - \gamma_1^2} \cdot \frac{\omega^2 - \gamma_2^2}{\omega^2 - \gamma_{-2}^2} \cdot \dots \cdot \frac{\omega^2 - \gamma_{-5}^2}{\omega^2 - \gamma_5^2} \cdot \frac{(\omega^2 - \gamma_6^2)^2}{(\omega^2 - \gamma_{-6}^2)^2} \cdot \dots \quad (117)$$

Il existe donc une fonction

$$(ea_0 \varphi_0 \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\mu)^{1/3}$$

qui est paire, uniforme et méromorphe sur  $\hat{S}$  et vérifiant les relations (59)-(60). En vertu de (107) et (113) on choisit la branche de la racine cubique de sorte que l'on ait

$$(e\varphi)^{1/3} |_{\omega=i\lambda} = 1. \quad (118)$$

Par construction les seuls pôles et zéros de  $(e\varphi)^{1/3}$  sont, dans le premier feuillet, ceux du produit formel (117) auxquels il faut ajouter, d'après (109) ceux de

$$\frac{\cos \omega - \cosh \mu}{(\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cos \beta)}.$$

**5. Méromorphie et croissance de  $f(\omega)$ .** — La construction de la fonction  $E(\omega)$  conduisant à une fonction  $f(\omega)$  méromorphe n'est pas encore achevée. D'après (57) et (58) nous avons

$$g(\omega) = \sqrt{C(\omega) R(\omega) E(\omega)}, \quad (119)$$

dont le prolongement dans le second feuillet définit

$$\tilde{g}(\omega) = \sqrt{C(\omega) R(\omega)/E(\omega)}, \quad (120)$$

avec la branche convenable du radical.

Pour que  $g$  soit méromorphe sur  $\hat{S}$ , il est nécessaire que tous les pôles et zéros des fonctions  $CRE$  et  $CR/E$  soient de multiplicité paire. Supposons que  $C$  n'ait ni pôle ni zéro sur  $\hat{S}$ , sauf peut-être aux points de ramification

$$\pm i\lambda + n \frac{\pi}{3}.$$

Montrons que le choix

$$E(\omega) = E_0(\omega) \frac{1}{a_0(\omega)} (e(\omega) \varphi(\omega))^{1/3} \quad (121)$$

où  $E_0$  sans zéro ni pôle sur  $\hat{S}$  vérifie (59), entraîne que  $f(\omega)$  soit uniforme dans tout le plan.

Examinons d'abord l'uniformité de  $g$  (et  $\tilde{g}$ ) aux points  $\pm \alpha, \pm \beta, \pm i\mu \pmod{2\pi}$ .

Nous avons montré l'équivalence (dans le premier feuillet)

$$E(\omega) \sim \frac{\cos \omega - \cosh \mu}{(\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cos \beta)}. \quad (122)$$

Or nous avons

$$R(\omega) \equiv 16(\cos \omega - \cos \gamma) (\cos \omega - \cos \alpha) \times (\cos \omega - \cos \beta) (\cos \omega - \cosh \mu).$$

On en déduit l'uniformité de  $g$  et  $\tilde{g}$  dans les voisinages en question, et

$$g(\omega) \sim (\cos \omega - \cosh \mu), \quad \tilde{g}(\omega) \sim (\cos \omega - \cos \alpha) (\cos \omega - \cos \beta). \quad (123)$$

Examinons maintenant les points  $\pm \gamma_n$ .

D'après (112) nous avons dans le premier feuillet

$$\frac{1}{a_0(\omega)} \sim \frac{\cos 3\omega - \cos 3\gamma}{\cos 3\omega + \cos 3\gamma} \sim (\omega^2 - \gamma^2) \frac{\omega^2 - \gamma_{-1}^2}{\omega^2 - \gamma_1^2} \cdot \frac{\omega^2 - \gamma_2^2}{\omega^2 - \gamma_{-2}^2} \cdot \dots \quad (124)$$

et par conséquent, d'après (114)-(117)

$$\frac{(e\varphi)^{1/3}}{a_0} \sim (\omega^2 - \gamma^2) \times \frac{(\omega^2 - \gamma_2^2)^2 (\omega^2 - \gamma_4^2)^2 (\omega^2 - \gamma_6^2)^3 (\omega^2 - \gamma_8^2)^4 \dots}{(\omega^2 - \gamma_1^2)^2 (\omega^2 - \gamma_3^2)^2 (\omega^2 - \gamma_5^2)^2 (\omega^2 - \gamma_7^2)^4 \dots} \quad (125)$$

où l'on aura noté la multiplicité impaire des zéros en  $\pm \gamma, \pm \gamma_6, \pm \gamma_{12}, \dots$

Il résulte de (125) que les deux fonctions  $(\cos \omega - \cos \gamma) E$  et  $(\cos \omega - \cos \gamma)/E$  ont tous leurs zéros et pôles d'affixes  $\pm \gamma_n$  de multiplicité paire.

Précisons : dans le premier feuillet, les zéros de  $g(\omega)$  sont :

$$\gamma, \gamma_2, \gamma_4 \text{ simples ; } \gamma_6, \gamma_8, \gamma_{10} \text{ doubles ; etc...}$$

et les pôles :

$$\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5 \text{ simples ; } \gamma_7, \gamma_9, \gamma_{11} \text{ doubles ; etc...} \quad (126)$$

De même pour  $\tilde{g}$ , les zéros simples sont  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$  et les pôles simples  $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_6$ . ( $g(\omega)$  étant paire on n'a donné que les abscisses positives.)

Nous pouvons donc conclure à l'uniformité de  $g$  et  $\tilde{g}$  sur  $\dot{S}$ , et par conséquent à la méromorphie de  $f$  dans le plan  $\omega$ , à la condition que le produit  $\sqrt{CE_0}$  soit uniforme sur  $\dot{S}$ .

Nous pouvons aussi conclure de (126)-(127) qu'il est suffisant que  $C$  et  $E_0$  soient sans zéro ni pôle sur  $\dot{S}$ , sauf peut-être sur les points de branchements, pour que  $f \equiv g + \tilde{g}$  ait les propriétés d'holomorphic exigées section 2 en (31) et (35), sauf peut-être aux points

$$\pm i\lambda + n \frac{\pi}{3}$$

que nous nous réservons d'examiner plus loin.

Le mécanisme de construction d'une fonction  $E$  vérifiant (59) sur  $\dot{S}$  est clair. Toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann peut toujours être décomposée en facteurs élémentaires du type  $\phi_b(\omega)$ - (96), les pôles et zéros étant arbitraires. Il est évident qu'on peut toujours trouver dans notre cas un polynôme trigonométrique  $C(\omega)$  de période  $\pi/3$ , s'annulant aux pôles de  $E$  et de  $E^{-1}$  avec une multiplicité convenable pour que  $f$  soit holomorphe dans une région finie quelconque, mais ceci se paye sur la croissance de  $f$ . C'est pourquoi seule la considération des propriétés de croissance des diverses fonctions  $E, R, C$  achèvera de déterminer  $f$ .

5.1 CROISSANCE DE  $f$ . — Même ignorant la forme exacte de  $E_0$  encore indéterminée, celle-ci sera du type  $\phi_b(\omega)$  comme les autres facteurs qui entrent dans  $E$ . Le type de croissance de  $E$  est simple à déterminer; les intégrales du type  $F_b(\omega)$  qui entrent dans la définition des  $\varphi$  sont holomorphes à l'infini dans chaque demi-plan. Pour  $\Im m \omega = +\infty$ , on a

$$\sqrt{\Delta} \propto \frac{i}{2} e^{-3i\omega} \quad F_b(\omega) = O(1) \quad (127)$$

et par conséquent en général

$$E(\omega) \propto \exp \{ \text{Cte} \cdot e^{3\Im m \omega} \}. \quad (128)$$

La fonction  $f$  doit tendre vers zéro à l'infini; or,  $C(\omega)$ , uniforme et méromorphe dans le plan  $\omega$ , ne peut compenser une telle croissance. Il est donc nécessaire que la constante figurant dans (128) soit nulle. Si l'on examine le terme dominant suivant, on constate que, les fonctions du type  $F_b(\omega)$  étant  $\pi/3$ -périodique, la contribution qu'elles fournissent en exponentielle est  $O(e^{3i\omega})$ . En fait les termes dominants proviennent des facteurs  $e(\omega)$  et  $\varphi_0(\omega)$  :

$$e(\omega) = \exp \{ O(e^{i\omega}) \}, \quad \varphi_0(\omega) \Rightarrow \exp \{ O(\omega e^{3i\omega}) \}. \quad (129)$$

Du fait de la relation

$$E(\omega) E(\omega_1) = h(\omega), \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} h(\omega) = 1, \quad (130)$$

la constante figurant dans (128) étant choisie nulle, on a les deux possibilités :

$$a) \lim E(\omega) = +1; \quad b) \lim E(\omega) = -1. \quad (131)$$

Dans le premier cas, on aurait

$$f(\omega) = \sqrt{C(\omega)} O(e^{-2i\omega}) \text{ puisque } R(\omega) = O(e^{-4i\omega}); \quad (132)$$

Dans le second cas, on aurait

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \sqrt{E} = \pm i \quad (133)$$

et, par conséquent, en vertu de (129), le comportement de

$$\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}}$$

serait dominé par celui de

$$i\sqrt{e} + \frac{1}{i\sqrt{e}},$$

c'est-à-dire  $O(e^{i\omega})$

$$\Rightarrow f(\omega) = \sqrt{C(\omega)} O(e^{-3i\omega}). \quad (134)$$

On voit donc qu'il est nécessaire que  $C(\omega)$  décroisse au moins comme  $e^{6i\omega}$  pour  $\Im m \omega = +\infty$ . Dans l'hypothèse a), on aurait  $f \propto e^{i\omega}$ , ce qui est compatible avec l'équation récurrente (29) pour  $\omega = \infty$ ; dans l'hypothèse b), il faudrait avoir au moins  $C = O(e^{12i\omega})$  pour que  $f$  s'annule à l'infini et le comportement asymptotique ne serait pas compatible avec (29). Nous sommes donc dans le premier cas

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} E = 1. \quad (135)$$

La fonction méromorphe  $C$  décroissant comme  $e^{6i\omega}$ , de période  $\pi/3$  est nécessairement de la forme

$$C(\omega) = \frac{1}{\cos^2 3\omega_0 - \cos^2 3\omega}. \quad (136)$$

Or l'étude précédente a montré que  $f$  avait les propriétés d'holomorphic voulues si  $C$  était sans pôles, sauf peut-être aux points

$$\pm i\lambda + n \frac{\pi}{3}.$$

Mais pour que  $f$  soit régulier en ces points, il faut que

$$\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}}$$

s'y annule. C'est précisément ce qui se passe si nous choisissons

$$E_0(i\lambda) = -1. \quad (137)$$

En effet, d'après (107),  $\varphi(i\lambda) = 1$ ; et, d'après la définition de  $e$  et de  $a_0$

$$e(i\lambda) = a_0(i\lambda) = 1,$$

de sorte que, d'après (118), (121) et (137) on a

$$E(i\lambda) = -1. \tag{138}$$

et, puisque  $h = 1$ , pour

$$\omega = \pm i\lambda + \frac{n\pi}{3},$$

on conclut :

$$E\left(\pm i\lambda + n\frac{\pi}{3}\right) = -1. \tag{139}$$

La somme

$$\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}}$$

est donc divisible par  $\Delta$ . Nous choisissons donc  $\omega_0 = i\lambda$ , ou  $C(\omega) = 1/\Delta$ , ce qui entraîne

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{R(\omega)}{\Delta(\omega)}} \left( \sqrt{E(\omega)} + \frac{1}{\sqrt{E(\omega)}} \right). \tag{140}$$

La branche du radical est choisie de sorte que  $\sqrt{E(i\lambda)} = i$ ,  $\sqrt{E}$  étant une fonction impaire réelle,  $\sqrt{R}$  étant paire.

La fonction  $f$  ainsi construite est uniforme dans tout le plan, et holomorphe dans  $\Im m \omega \neq 0$ , à condition de choisir  $E_0$  sans zéro ni pôle sur  $\dot{S}$  et vérifiant la condition (137).

**6. L'équation pour les valeurs propres.** — La solution (121) pour  $E(\omega)$  est déterminée à une fonction  $E_0(\omega)$  près sans zéro ni pôle, uniforme sur  $\dot{S}$  et possédant les propriétés (71). Mais nous avons oublié que la fonction  $a_0(\omega)$  donnée par l'expression (113) n'est qu'une solution particulière et n'est donc déterminée qu'à un facteur près du type  $E_0$ . C'est donc la fonction  $E_0^3$  qui doit être uniforme sur  $\dot{S}$ .

L'uniformisation elliptique sera très commode pour exprimer l'uniformité de  $E_0^3$  sur  $\dot{S}$ ; comme elle sera utile pour le calcul numérique de  $\gamma$ , nous y consacrons un paragraphe rapide.

Nous savons que  $\log E_0$  est holomorphe sur  $\dot{S}$  et, en utilisant la méthode des sections précédentes, on constate aisément que la fonction

$$E_0(\omega) = -\exp \times \left\{ s \sqrt{\Delta(\omega)} \int_0^{\pi/6} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} \frac{\sin 6\omega}{\cos 6\omega' - \cos 6\omega} \right\} \tag{141}$$

a toutes les propriétés exigées, sauf peut-être l'uniformité à l'infini. La quantité  $s$  sera justement déterminée par la condition que  $E_0^3$  soit uniforme sur  $\dot{S}$ .

**6.1 UNIFORMISATION ELLIPTIQUE.** — Il s'agit d'uniformiser des fonctions de période  $2\pi/3$  en  $\omega$ , méromorphes sur  $\dot{S}$ . Si elles étaient méromorphes sur  $S$ , ce serait des fonctions rationnelles en  $e^{3i\omega}$  et  $\sqrt{\Delta}$ . Le plan étant disséqué comme décrit section 2, on se convaincra que la correspondance  $\omega \rightarrow u$  définie dans les notations de Jacobi par la relation

$$e^{3i\omega} = e^{-3\lambda} \operatorname{sn}\left(K + i\frac{K'}{2} - u; k\right), \quad \sqrt{k} = e^{-3\lambda} \tag{142}$$

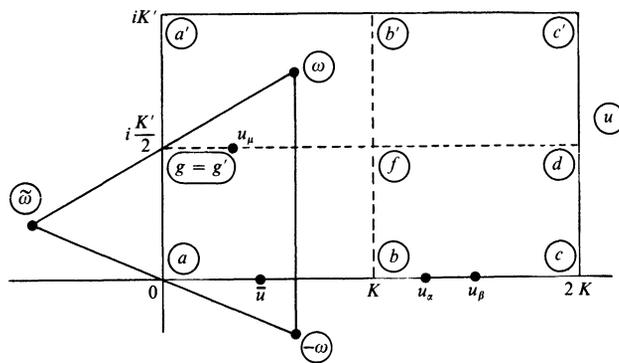
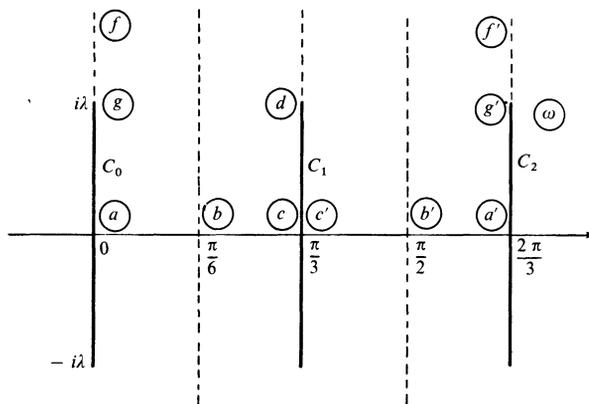
réalise la transformation conforme de la bande

$$\Im m \omega \geq 0, \quad 0 < \Re e \omega < \frac{2\pi}{3},$$

coupée par  $C_0, C_1, C_2$ , dans le rectangle

$$0 < \Re e u < 2K, \quad 0 \leq \Im m u \leq K',$$

comme l'illustre la figure ci-dessous.



On a les formules de transformation sous forme réelle

$$\begin{aligned} \sin 3\omega &= (1-k) \frac{smu}{1 - ksn^2 u}, \\ \cos 3\omega &= \frac{cnu \operatorname{dn}u}{1 - ksn^2 u}, \end{aligned} \tag{143}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sinh 3\lambda \frac{1 + ksn^2 u}{1 - ksn^2 u}, \quad \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2}{3} e^{-3\lambda} du.$$

avec le tableau de correspondance entre valeurs remarquables

$\frac{\omega}{0}$	$\frac{u}{0}$		$\frac{\omega}{\bar{\gamma}}$	$\frac{u}{\bar{u}}$
$\frac{\pi}{6}$	$K$		$\alpha - \frac{2\pi}{3}$	$u_\alpha$
$\frac{\pi}{3}$	$2K$		$\beta - \frac{\pi}{3}$	$u_\beta$
$i\lambda$	$i\frac{K'}{2}$		$i\mu$	$-u_\mu + K + i\frac{K'}{2}$
$\infty$	$K + i\frac{K'}{2}$			

(144)

où l'on s'est arrangé pour que les quantités  $\bar{u}$ ,  $u_\alpha$ ,  $u_\beta$ ,  $u_\mu$ , soient réelles et vérifient les inégalités

$$0 < \bar{u}, \quad u_\mu < K; \quad K < u_{\alpha,\beta} < 2K.$$

Les formules qui permettent leur calcul à partir de  $\gamma$  sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{k} \operatorname{sn} u_\mu &= e^{-3\mu} \\ \sqrt{k} \operatorname{sn} \bar{u} &= \frac{\sqrt{\cosh^2 3\lambda - \cos^2 3\gamma - \sinh 3\lambda}}{|\sin 3\gamma|} \\ \sqrt{k} \operatorname{sn} u_\alpha &= \frac{\sqrt{\cosh^2 3\lambda - \cos^2 3\alpha - \sinh 3\lambda}}{\sin 3\alpha} \text{ etc...} \end{aligned} \right\} (145)$$

On écrira  $\varphi(u)$  la transformée d'une fonction  $\varphi(\omega)$  analytique sur  $\hat{S}$ . Les propriétés d'équivalence ci-dessous seront utiles :

a)  $\varphi(\omega)$ , uniforme et méromorphe sur  $\hat{S}$ , de période  $2\pi/3 \Leftrightarrow \varphi(u)$  de périodes  $4K$  et  $2iK'$ , méromorphe dans le plan  $u$  en dehors des images de  $\omega = \infty$ , c'est-à-dire en dehors des points congruents à

$$K + i\frac{K'}{2}.$$

b)  $\varphi(\omega)$  paire ou impaire  $\Leftrightarrow \varphi(u + iK') = \pm \varphi(u)$ .

c)  $\varphi(\omega) = \varphi\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \varphi(u) = \varphi(2K + iK' - u)$ .

d) Si  $\omega$  et  $\tilde{\omega}$  ont même affixe dans les deux feuillets  $u \leftrightarrow \omega$ ,  $iK' - u \leftrightarrow \tilde{\omega} \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(u) = \varphi(iK' - u)$ .

A titre d'application, les relations (90) pour la fonction impaire  $\varphi_\alpha(\omega)$  sont équivalentes aux suivantes

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\alpha(u) \varphi_\alpha(2K - u) &= \eta_\alpha(u) \\ \varphi_\alpha(u) \varphi_\alpha(-u) &= -1. \end{aligned} \right\} (146)$$

Compte tenu de (87) et (143) on a

$$\eta_\alpha(u) = \frac{\theta_2\left(\frac{\pi(u - u_\alpha)}{4K}, q^{1/4}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(u - u_\alpha)}{4K}, q^{1/4}\right)} : (u \rightarrow -u). \quad (147)$$

où le paramètre  $q$  intervenant dans les fonctions  $\theta$  est défini par

$$q = e^{-\tau}, \quad \tau = \pi \frac{K'}{K}. \quad (148)$$

On déduit de (146) la fonction  $\varphi_\alpha(u)$  qui vaut 1 pour  $u = i\frac{K'}{2}$  :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(u) &= i \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(u + u_\alpha)}{4K}, q^{1/4}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(u - u_\alpha)}{4K}, q^{1/4}\right)} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{\pi}{2K}(u_\alpha - K) \frac{\theta'_3}{\theta_3}\left(\frac{\pi u}{2K}, \sqrt{q}\right)\right]. \end{aligned} \quad (149)$$

C'est la transformée de la solution  $\varphi_\alpha(\omega)$  donnée en (99). On vérifie que  $\varphi_\alpha(u)$  est méromorphe en  $u$  en dehors des pôles de  $\theta'_3/\theta_3$  ou zéros de  $\theta_3$ , précisément images de  $\omega = \infty$ .  $\varphi_\alpha(u)$  a seulement deux pôles dans le rectangle  $[2K, 2iK']$ , situés en  $u_\alpha$  et  $u_\alpha + iK'$ , qui correspondent à  $\omega = \pm \alpha \pmod{2\pi/3}$  dans le premier feuillet; les zéros  $-u_\alpha$ ,  $-u_\alpha + iK'$  correspondent à  $\tilde{\omega} = \pm \alpha$ , mais dans le second feuillet. Ceci confirme le résultat de la section 4

$$\varphi_\alpha(\omega) \sim \frac{1}{\cos 3\omega - \cos 3\alpha}.$$

Revenons à la fonction  $E_0$  donnée par (141). Dans les notations de Whittaker et Watson [10, p. 523],  $E_0$  s'exprime directement à l'aide de l'intégrale de troisième espèce  $\Pi$

$$\begin{aligned} E_0(u) &= -\exp\frac{s}{3} \left[ \Pi\left(K, i\frac{K'}{2} + K - u\right) - \right. \\ &\quad \left. - \Pi\left(K, i\frac{K'}{2} - K + u\right) \right] \\ &= -\exp\frac{sK}{3} \left[ Z\left(K + \frac{iK'}{2} - u\right) + \right. \\ &\quad \left. + Z\left(K - \frac{iK'}{2} - u\right) \right], \end{aligned}$$

ou encore, après transformation de Landen,

$$(q \rightarrow \sqrt{q}),$$

$$E_0(u) = -\exp\left\{\frac{\pi s}{6} \frac{\theta'_3}{\theta_3}\left(\frac{\pi u}{2K}, \sqrt{q}\right)\right\}. \quad (150)$$

La fonction  $E_0^3(\omega)$  doit être uniforme et paire : en vertu de b) ceci équivaut à

$$E_0^3(u + iK') = E_0^3(u). \quad (151)$$

La propriété fondamentale des fonctions  $\theta$

$$\frac{\theta'}{\theta}(z + i\pi\tau, q) - \frac{\theta'}{\theta}(z, q) = -2i,$$

entraîne donc

$$3 \times \frac{\pi s}{6} \times (-2i) = \text{multiple de } 2\pi i. \quad (152)$$

En conclusion le nombre  $s$  est un entier pair.

Il nous reste à exprimer la dernière condition sur la croissance de  $E$  qui se traduit par l'égalité (135).

Nous avons

$$E = \frac{E_0}{a_0} (a_0 \varphi_0 \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\mu)^{1/3}. \quad (153)$$

Il suffit de se reporter aux expressions (99) pour  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\mu$ , (104) et (105) pour  $\varphi_0$ , (113) pour  $a_0$  et (141) pour  $E_0$ . Au voisinage de  $\Im m \omega = +\infty$  on obtient

$$\log E(\omega) = \frac{1}{2} H e^{-3i\omega} + O(\omega e^{3i\omega}) \quad (154)$$

où la constante  $H$  qui doit être annulée est donnée par la somme

$$H = \int_{5\pi/6}^{\alpha} + \int_{\pi/2}^{\beta} - \int_{i\lambda}^{i\mu} - 4 \int_{\pi/6}^{\gamma} + s \int_0^{\pi/6} \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta(\omega)}} - \frac{6}{\pi} \int_{\bar{\gamma}}^{i\lambda} \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\Delta(\omega)}}. \quad (155)$$

L'équation  $H = 0$  est une équation réelle pour  $\gamma$ . Si l'on utilise la paramétrisation elliptique définie dans cette section et les notations du tableau (144) on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\gamma} \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} &= \frac{2\sqrt{k}}{3} (K - \bar{u}), \\ s \int_0^{\pi/6} \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} &= \frac{2\sqrt{k}}{3} \cdot sK, \\ \int_{5\pi/6}^{\alpha} + \int_{\pi/2}^{\beta} &\equiv \int_{\beta - \frac{2\pi}{3}}^{\alpha - \frac{2\pi}{3}} \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2\sqrt{k}}{3} (u_\alpha - u_\beta), \\ \int_{i\lambda}^{i\mu} \frac{d\omega}{\sqrt{\Delta}} &= \int_{\lambda}^{\mu} \frac{dv}{\sqrt{\cosh^2 3v - \cosh^2 3\lambda}} = \\ &= \frac{2\sqrt{k}}{3} (K - u_\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_{\bar{\gamma}}^{i\lambda} \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\Delta}} = \\ &= \frac{2\sqrt{k}}{9i} \int_{\bar{u}}^{iK'/2} \log \left\{ \sqrt{k} \operatorname{sn} \left( K + \frac{iK'}{2} - u \right) \right\} du \end{aligned} \quad (156)$$

et à l'aide de développements rapidement convergents

$$\begin{aligned} -\frac{6}{\pi} S_0 &= \frac{2\sqrt{k}}{3} \cdot \frac{2K}{\pi^2} \times \\ &\times \left\{ \bar{x}^2 + \left( \frac{\tau}{4} \right)^2 - \frac{\pi^2}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^{m-1} \cos m\bar{x}}{m^2 \cosh m\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (157)$$

On a utilisé la notation  $\bar{x} = \pi\bar{u}/2K$ . On posera aussi

$$x_\alpha = \frac{\pi u_\alpha}{2K}, \quad x_\beta = \frac{\pi u_\beta}{2K}, \quad x_\mu = \frac{\pi u_\mu}{2K}, \quad (158)$$

$$\sigma = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^{m-1} \cos m\bar{x}}{m^2 \cosh m\tau}. \quad (159)$$

L'équation  $H = 0$  s'écrit donc

$$\begin{aligned} u_\alpha - u_\beta + u_\mu + 4\bar{u} + (s-5)K + \\ + \frac{2K}{\pi^2} \left[ \bar{x}^2 + \left( \frac{\tau}{4} \right)^2 - \frac{\pi^2}{12} + \pi^2 \sigma \right] = 0 \end{aligned} \quad (160)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} (x_\alpha - x_\beta + x_\mu + 4\bar{x}) + \left( \frac{\bar{x}}{\pi} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{4\pi} \right)^2 + \\ + \sigma - \frac{1}{12} = \frac{1}{2} (5-s). \end{aligned} \quad (161)$$

Le calcul numérique du premier membre pour une valeur donnée de  $\gamma$  est relativement simple pour les raisons suivantes :

a) Les racines  $\alpha, \beta, \mu$ , s'obtiennent très simplement à partir de (73) et (74).

b) Le module  $k = e^{-6\lambda}$  (tel que  $\cosh 3\lambda = 3 \cos \gamma$ ) est petit, et donne un paramètre  $q$  de l'ordre de  $10^{-4}$ ; il suffit du premier terme de la série  $\sigma$  pour avoir six chiffres exacts.

c) Le module étant petit, la fonction  $\operatorname{sn} u$  de Jacobi est très proche du sinus et les relations (145) pour le calcul des  $x_\alpha, x_\beta \dots$  s'inversent rapidement.

Dans l'intervalle de variation

$$\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{3},$$

nous n'avons trouvé qu'une seule solution, correspondant à  $s = 2$  :

$$\cos \gamma = 0,692\ 122 \dots \quad (162)$$

Le bilan de (161) est  $O(10^{-6})$ , avec les valeurs numériques suivantes des diverses quantités utiles :

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= 0,692\ 122 & \frac{x_\mu}{\pi} &= 0,257\ 977\ 3 \\ \sinh 3\lambda &= 1,819\ 696\ 1 & \frac{x_\alpha}{\pi} &= 0,603\ 442\ 2 \\ \sqrt{k} &= 0,256\ 669\ 3 & \frac{x_\beta}{\pi} &= 0,724\ 548\ 4 \\ q &= 0,000\ 271\ 84 & \frac{\bar{x}}{\pi} &= 0,240\ 435\ 3 \\ \tau &= 8,210\ 280 & \sigma &= 0,000\ 040\ 1. \\ \left(\frac{\tau}{4\pi}\right)^2 &= 0,426\ 870\ 6 & & \\ \cosh \mu &= 1,161\ 251\ 5 & & \\ \cos \alpha &= -0,917\ 703\ 0 & & \\ \cos \beta &= -0,243\ 548\ 4 & & \end{aligned} \quad (163)$$

Pour la valeur de  $\cos \gamma$  donnée par (162), le bilan de (161), c'est-à-dire premier membre moins second membre, est égal à 0,000 001 0. Le calcul des quelques valeurs voisines nécessaires à l'approximation nous donne pour la pente

$$\frac{\partial(H/2K)}{\partial(\cos \gamma)} \sim 5,81$$

ce qui permet de conclure que nous avons  $\cos \gamma$  avec 6 chiffres exacts.

L'énergie de liaison  $B$  définie section 1 est telle que

$$2B = (2 \cos^2 \gamma)^{-1} = 1,043\ 77 \dots \quad (164)$$

à comparer avec la valeur 1,044 obtenue par Dodd [4] en résolvant numériquement les équations de Faddeiev. La valeur variationnelle est  $2B = 1$ .

La méthode d'analyse utilisée dans ce travail pour construire une solution méromorphe de l'équation aux différences n'est pas distincte de celle qui a

été exposée en détail dans le papier cité en référence [9]. Cependant le résultat obtenu ici est plus simple que précédemment puisque nous passons de cinq équations ordinaires couplées à une seule pour déterminer l'énergie de liaison. L'équivalence entre les deux systèmes (si elle existe) semble bien compliquée à établir et réside peut-être dans les théorèmes d'Abel. Le progrès tient à une construction différente de la solution générale de l'équation aux différences. Autrement dit la partie algébrique élémentaire est traitée de façon plus satisfaisante et ceci évite justement l'inversion du système de Jacobi sur lequel nous étions tombés dans le papier cité. Reste irréductible et commune aux deux la partie transcendante qui a son origine dans l'équation

$$\varphi_0\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) = \eta^2(\omega) \varphi_0(\omega).$$

La solution  $\varphi_0(\omega)$ , qui ne peut être périodique, n'est donc pas uniforme sur la surface de Riemann de la courbe  $(\sqrt{\Delta}, e^{3i\omega})$ . Cependant on aurait pu utiliser l'uniformisation elliptique pour transformer cette équation. On aurait obtenu

$$\varphi_0(u + 4K) = \eta^2(u) \varphi_0(u)$$

avec les conditions  $\varphi_0(u) = \varphi_0(u + iK')$ .

Or  $\eta(u)$  est une fonction doublement périodique très simple, méromorphe dans tout le plan  $u$  et qui admet par conséquent une factorisation. On retombe alors sur le type d'équations aux différences premières qu'avaient rencontrées Mc Guire et Hurst [5] dans un problème de particules impénétrables analogue. La fonction  $\varphi_0(u)$  peut alors être construite comme produit infini de facteurs élémentaires dont les zéros et les pôles sont de multiplicité croissante avec le rang, définissant ainsi une fonction manifestement méromorphe. Nous avons préféré utiliser la représentation intégrale (104)-(105) en  $\omega$ , mais les deux formes sont équivalentes.

### Bibliographie

- [1] JOST, R., *Z. Angew. Math. Phys.* **6** (1955) 316.
- [2] NUSSENZWEIG, H. M., *Proc. R. Soc. A* **264** (1961) 408.
- [3] MCGUIRE, J. B., *J. Math. Phys.* **5** (1964) 622.
- [4] DODD, L. R., *Aust. J. Phys.* **25** (1972) 507.
- [5] MCGUIRE, J. B. et HURST, C. A., *J. Math. Phys.* **13** (1972) 1595.
- [6] SOMMERFELD, A., *IV Optics* (Ac. Press).
- [7] OSGOOD, W. F., *Lehrbuch der Funktionentheorie*. II. Chelsea, 1965.
- [8] MUSKHELISHVILI, N. I., *Singular Integral Equation* (Groningen) 1953.
- [9] GAUDIN, M., Preprint D. Ph. T. 1975/43.
- [10] WHITTAKER and WATSON, *Modern Analysis*, 4<sup>e</sup> éd. (Cambridge) 1958.