Tutorat 1 de Mathématiques (1ème année)

26/10/2010

Transformations conformes et écoulement des fluides

Compte-rendu à déposer svp le lundi 25/10/2010 à 17:00 dans mon bureau au Laboratoire PCT (escalier F). N'hésitez pas à me contacter en cas de difficultés majeures au cours de la préparation, ou si vous avez besoin de précisions.

Florent Krzakala
Laboratoire Physico-Chimie Théorique, ESPCI
Bât. F, 3ème étage, bureau F 3.14
fk@espci.fr, http://www.pct.espci.fr/~florent/

Résumé

Les propriétés des fonctions analytiques sont un outil extrêmement puissant pour la description mathématique de nombreux problèmes physiques bidimensionnels, en particulier là où interviennent des champs vectoriels dérivant d'un potentiel vérifiant l'équation de Laplace. Un exemple est donné par le problème de l'écoulement irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux autour d'un obstacle défini par une courbe simple et fermée. Le but est de déterminer le courant du fluide avec les propriétés suivantes : (a) la courbe est une partie de la ligne de courant (b) la vitesse du fluide loin de l'obstacle doit être fixée. Dans ce tutorat on utilisera les transformations conformes pour résoudre quelques exemples de ce problème d'hydrodynamique.

I Rappel : fonctions analytiques et hydrodynamique

A. Soit $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ une fonction analytique. Comment les lignes $u(x,y) = \text{const}$ et $v(x,y) = \text{const}$ se croisent ? Soit le vecteur $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} u$. Conclure que les lignes $v(x,y) = const$ sont les lignes de champ (ou de courant) de $\overrightarrow{A}$.

B. Montrer que les fonctions u et v vérifient l'équation de Laplace ($\Delta u = \Delta v = 0$). Ces fonctions sont alors dites "harmoniques".

C. Considérez un fluide incompressible et non visqueux qui écoule sans rotation. Montrez alors que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ dérive d'un potentiel $\phi(x,y)$ et que $\Delta\phi = 0$.

D. Montrez que pour toute fonction harmonique ϕ, il existe une fonction harmonique ψ telle que $\Omega(z) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ soit analytique. Montrez que $\Omega'(z) = v_x - iv_y$, avec $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi$. Quelle signification physique possèdent ϕ et ψ pour un champ d'écoulement $\overrightarrow{v}$?

II Transformations Conformes : généralités

Considérons un changement de variable $z \to w = f(z)$ dans le plan complexe. Un "bon" changement de variable doit être bijectif, et c'est le cas si le Jacobien de la transformation est non nul (ainsi que celui de la transformation inverse).

A. Montrer que lors d'un changement de variable $z = x + iy \to w = f(z) = u + iv$ le jacobien de la transformation défini par

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{1}$$

est égal à $|f'(z)|^2$ si f est holomorphe. On définira donc une transformation conforme par un tel changement de variable quand f est holomorphe et sa dérivée ne s'annule pas.

B. Les transformations conformes ont beaucoup de propriétés intéressantes (entre autres, elles conservent les angles – ainsi le nom). Considérons une fonction ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ (dont le laplacien est $\Delta\phi(x,y) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$) et son image après la transformation $\Phi(u,z) = \phi(f^{-1}(u,z))$. Montrez que

$$\Delta\phi(x,y) = |f'(z)|^2 \Delta\Phi(u,z) \tag{2}$$

avec $\Delta\Phi(u,z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}$. En déduire que la transformation conforme laisse invariante la propriété de harmonicité.

III Transformations de Joukowski (1) : écoulement autour d'un disque

On considère l'application de $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto w = f(z) = z + \frac{1}{z} \tag{3}$$

A. Sur quel domaine de $\mathbb{C}$ est la fonction f holomorphe ? Sur quel domaine est elle conforme ? Sur quelle bijectif ? (Quelle relation existe entre deux points distincts z_1 et z_2 tels que $f(z_1) = f(z_2)$? En déduire la condition que doit vérifier un domaine D du plan complexe pour que f soit injective sur D. Conclure que f est injective sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| > 1\}$ ou sur $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tel que } |z| < 1\}$.)

B. Calculer la partie réelle u et la partie imaginaire v de $w = f(z) = u + iv$ en fonction des coordonnées polaires $r \in (0,\infty)$ et $\vartheta \in [0,2\pi)$ de $z = re^{i\vartheta}$. En déduire l'image par f des deux courbes suivantes :
   – Du rayon R_α issu de O avec un angle α d'équation $z = re^{i\alpha}$ avec $r \in (0,\infty)$
   – Du cercle C_R de centre O de rayon R d'équation $z = Re^{i\vartheta}$ avec $\vartheta \in [0,2\pi)$ On donnera de $f(R_\alpha)$ et de $f(C_R)$ des équations cartésiennes dans les axes (u,v) et on précisera, s'il y a lieu, les asymptotes et les foyers des courbes obtenues avant de les dessiner.

   On n'oubliera pas les cas particuliers $\alpha = 0, \pi/2, \pi, R = 1$. Que pouvez vous dire sur la façon dont se coupent les courbes $f(R_\alpha)$ et $f(C_R)$? Conclure que cette fonction transforme le domaine $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| > 1\}$ dans le plan complexe $\{w \in \mathbb{C}\}$

C. Considérons l'écoulement d'un fluide de vitesse $V_0 \parallel \mathbf{e}_x$ uniforme et constante dans le plan w. Écrire la fonction analytique $\Omega(w)$ associée à ce champ de vitesse.

D. Utiliser la transformation de Joukowski pour démontrer que l'écoulement du fluide autour d'un disque de centre O et de rayon unitaire est décrit par la fonction

$$\Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{1}{z} \right) \tag{4}$$

pour $|z| \geq 1$. Quelle interprétation doit on donner à V_0 ?

E. Montrer que le cercle unitaire est une partie de la ligne de courant (vitesse) $\psi = 0$. Déterminer les autres parties de cette ligne de courant. Calculer la vitesse sur les axes $x = 0$ et $y = 0$. Dessiner les lignes de courant autour de l'obstacle.

F. Montrer comment généraliser ces résultats à un cercle de rayon r.

IV Transformations de Joukowski (2) : profil de l'aile d'avion

A. On veut maintenant étudier l'action locale de $f(z)$ au point $z_1 = 1$, la où elle n'est pas conforme. Écrire le développement de Taylor de $f(z)$ en $z = 1$ à l'ordre $|z-1|^2$. En déduire que toute courbe qui passe par le point z_1 avec une tangente faisant un angle α avec l'axe e_x a pour image par f une courbe qui présente un point de rebroussement (cusp) en $w_1 = f(z_1)$ [1].

B. Un cas dégénéré du profil de Joukowski : On considère le cercle C_0 de centre ih et de rayon $R = \sqrt{1+h^2}$. C_0 coupe l'axe e_y en $C := (0, ih + iR)$ et en $D := (0, ih - iR)$, et il coupe l'axe e_x en z_1 et z_2 (avec une tangente faisant les angles α et $\pi - \alpha$ avec l'axe e_x). L'arc qui contient le point D peut être caractérisé par l'équation $\arg(z - z_2) - \arg(z - z_1) = \pi + \alpha$. L'équation pour l'arc opposé est $\arg(z - z_2) - \arg(z - z_1) = \alpha$. Montrez que l'image de C_0 par f est un arc de cercle C_0' d'extrémités w_1' et w_2'. On précisera le centre et le rayon de cet arc de cercle. Pour cela, calculez $\frac{f(z)+2}{f(z)-2}$ en fonction de $\frac{z+1}{z-1}$.

Avec un peu plus de travail N. Joukowski (1847 - 1921) a montré que le cercle C tangent en z_1 au cercle C_0' et entourant le point z_2 se transforme dans une courbe fermée (C') entourant C_0' et présentant un point de rebroussement en w_1. Cette courbe C' ressemble à une aile d'avion et s'appelle profil "Joukowski", l'arc C_0' représente le centre de l'aile. La transformation de Joukowski permet donc d'obtenir des solutions analytiques pour l'écoulement autour de l'aile de l'avion C' à partir de l'écoulement autour du cercle C décrit par une fonction $\Omega(z)$ qui généralise le cas de l'équation (4).

[1] On considérera les deux demi-tangentes orientées d'angle α et $\pi - \alpha$, puis leur image par f.