Tutorat 2 de Mathématiques (1ère année)

19/11/2010

Transformée de Radon et Tomographie par Rayons X

Compte-rendu à déposer svp le casier de mon bureau. N'hésitez pas à me contacter en cas de difficultés majeures au cours de la préparation, ou si vous avez besoin de précisions.

Florent Krzakala
Laboratoire Physico-Chimie Théorique, ESPCI
Bât. F, 3ème étage, bureau F 3.14
fk@espci.fr, http://www.pct.espci.fr/~florent/

Résumé

L'objectif de ce préceptorat est de se familiariser avec la transformation de Radon d'une fonction bidimensionnelle. On montre en particulier que cette transformation est inversible, et que son inversion fait intervenir la transformée de Fourier bidimensionnelle. D'un point de vue pratique, elle est à la base de la tomographie par rayons X (ou encore scanner à rayons X), qui permet dans le contexte médical d'obtenir des images de coupes de l'intérieur des organes. Les parties II et IV constituent un travail personnel de documentation à mener par binôme : chaque binôme préparera une présentation au tableau d'environ 10–15 minutes sur une des parties.

Références

[1] Charles L. Epstein. Introduction to the Mathematics of Mathematical Imaging, SIAM, 2008.

[2] Ali Mohammad-Djafari. Transformée de Radon et Reconstruction d'Image. http ://djafari.free.fr/pdf/tr.pdf.

I Transformation de Radon

I.1 Préliminaires : paramétrage d'une droite dans un plan

1. Dans un espace bidimensionnel, combien de paramètres sont nécessaires à la définition d'une droite ? Donnez quelques types d'équations définissant une droite unique.
2. On choisit dans le contexte de la transformation de Radon de définir une droite par les paramètres t et Φ, où $(t, \Phi) \in \mathbb{R} \times [0; 2\pi[$, représentés sur la figure 1. A tout angle Φ correspond un unique vecteur unitaire $\mathbf{u_t}$:
$$\mathbf{u_t} = \cos(\Phi)\mathbf{u_x} + \sin(\Phi)\mathbf{u_y}$$
Montrer qu'à une droite donnée correspondent deux couples possibles de valeurs (t, Φ).
3. On choisit d'orienter la droite positivement le long du vecteur $\mathbf{u_\Phi}$, défini par :
$$\mathbf{u_\Phi} = -\sin(\Phi)\mathbf{u_x} + \cos(\Phi)\mathbf{u_y}$$
Montrer qu'à un couple (t, Φ) correspond une droite orientée unique.
4. Un couple naturel de coordonnées, associé à la famille de droites obtenues pour Φ donné, est le couple $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ des coordonnées d'un point dans la base $(\mathbf{u_t}, \mathbf{u_\Phi})$ relativement à la droite qui passe par ce point. Donner l'expression de (x, y) en fonction de (t, s), ainsi que l'expression de (t, s) en fonction de (x, y). En déduire la relation entre les éléments de surface différentiels $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$.

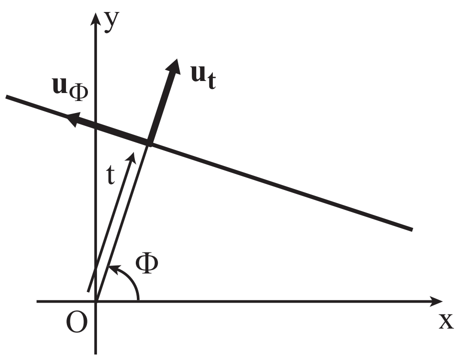

Fig. 1 – Paramétrage (t, Φ) d'une droite dans un plan.

I.2 Définition de la transformée de Radon

Définition : la transformée de Radon d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par l'expression suivante

$$\widehat{f}(t, \mathbf{u_t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t\mathbf{u_t} + s\mathbf{u_\Phi})\mathrm{d}s \tag{1}$$

Donner quelques conditions sur f qui vous semblent nécessaire à l'existence de $\widehat{f}$.

Dans le cadre de ce sujet, on travaillera systématiquement avec des fonctions f qui admettent une transformée de Radon. Par définition, on dit que ces fonctions appartiennent au domaine naturel de la transformée de Radon.

Utilisation de la distribution δ : La définition de la transformée de Radon peut également être formulée à l'aide de la distribution de Dirac. Cette formulation à l'avantage de permettre une définition générale de la transformée de Radon en dimension quelconque.

1. En utilisant la relation

$$f(t\mathbf{u_t} + s\mathbf{u_\Phi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t'\mathbf{u_{t'}} + s\mathbf{u_\Phi})\delta(t' - t)\mathrm{d}t'$$

   proposer une définition de la transformation de Radon sous forme d'une intégrale de surface.
2. Proposer une définition de la transformation de Radon pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$. Donner une interprétation géométrique de la transformation de Radon dans le cas $n = 3$.

Dans tout ce qui suit, on ne considère que la transformation de Radon pour $n = 2$.

I.3 Quelques exemples

I.3.1 Sans calculs

1. Sur la figure 2, associer à chaque image sa transformée de Radon. Les images représentent des fonctions f de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$. Précisez la signification des échelles de gris sur les différentes figures. Précisez la nature des axes sur les transformées de Radon, et donner l'échelle de longueur en fonction de celle des images.

N.B. : Au sein de chaque série d'image (série des images d'origine ou série des transformées de Radon), les échelles sont identiques pour chaque figure.

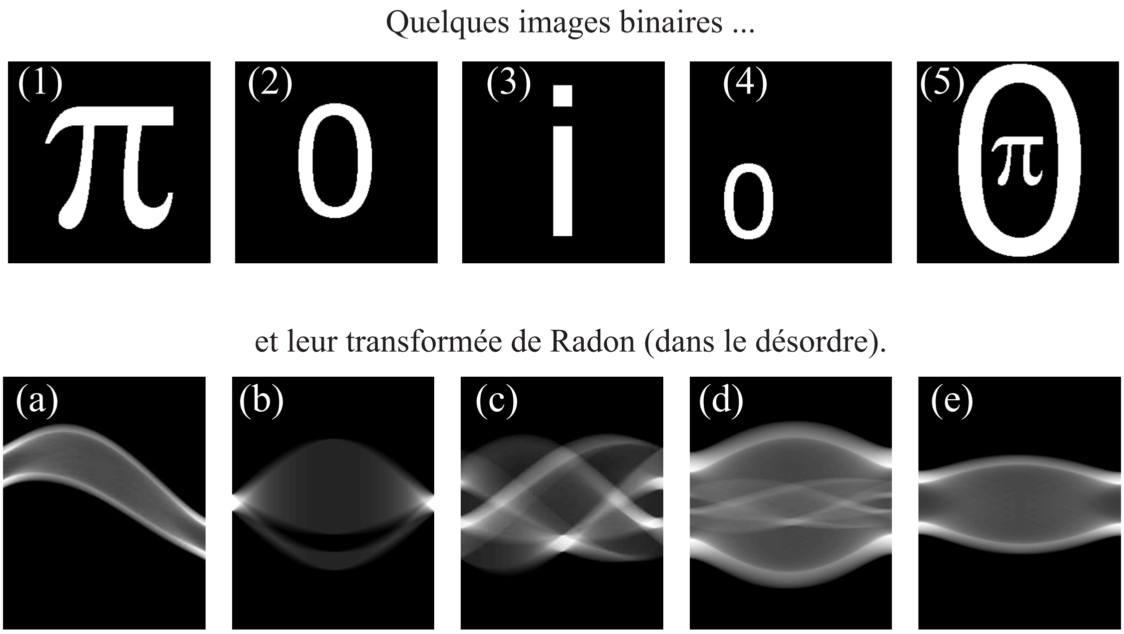

Fig. 2 – Illustration qualitative de la transformation de Radon.

2. A partir de la définition de la transformée de Radon, et des exemples de la figure 2, proposer quelques propriétés vérifiées par la transformation de Radon.
3. Indiquez sans calcul l'allure de la transformée de Radon d'une fonction constante sur un support quasi-ponctuel (on précisera le sens de "quasi-ponctuel"). De même, indiquer sans calcul l'allure de la transformée de Radon d'une fonction constante sur un support assimilable à un segment de droite.

I.3.2 À la main

1. Calculer la transformée de Radon d'une fonction constante sur un disque de rayon R, et nulle ailleurs.
2. Calculer la transformée de Radon de $f(x, y) = a \exp(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2})$.

II Principe de la tomographie par rayons X

Quels sont les principes physiques de la tomographie par rayons X ? On précisera en particulier quelle grandeur physique est mesurée, et quelle grandeur on cherche à reconstruire sous forme d'image. On vérifiera qu'on peut exprimer les grandeurs mesurées par une transformée de Radon du paramètre que l'on cherche à imager. La tomographie par rayons X est basée sur l'inversion de la transformation de Radon, à savoir la déduction de f à partir d'une mesure de $\widehat{f}$. La partie qui suit propose d'expliciter le principe de cette inversion.

III Inversion de la transformée de Radon

III.1 Formule de rétroprojection

1. Expliquer pourquoi la fonction suivante,

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u_t}, \mathbf{u_t}) \mathrm{d}\Phi \tag{2}$$

obtenue en faisant une moyenne angulaire de la transformée de Radon d'une fonction f, est susceptible de ressembler à la fonction f. Cette formule est appelée formule de rétroprojection.

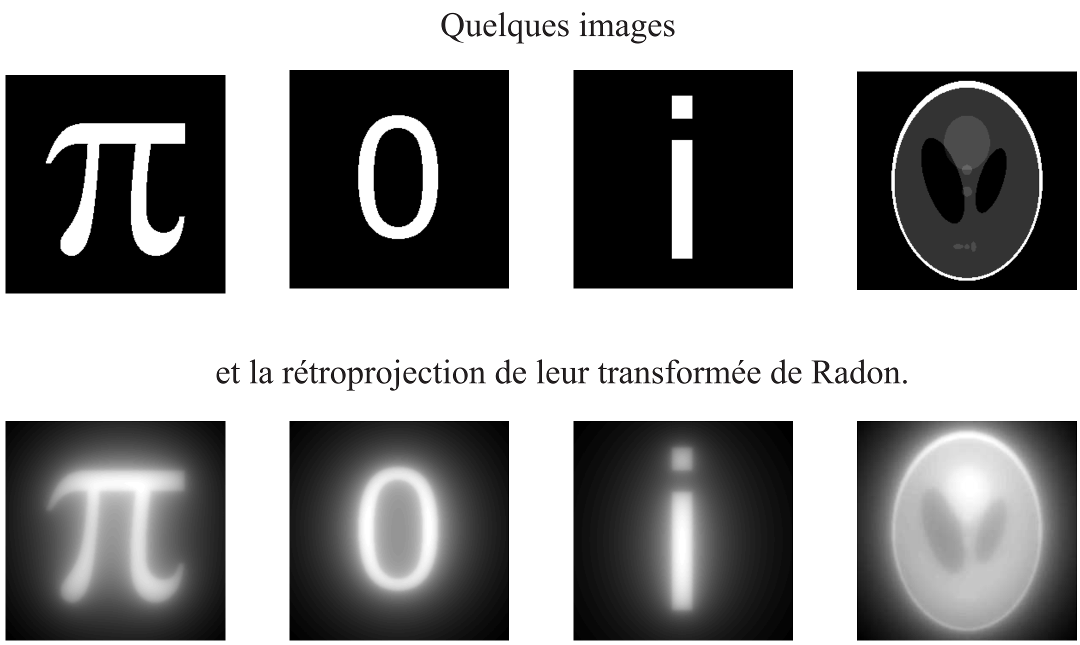

Fig. 3 – Illustration de la formule de rétroprojection.

2. La figure 3 illustre l'application de la formule de rétroprojection aux cas rencontrés précédemment (images binaires), ainsi qu'à un exemple tiré du contexte de l'imagerie médicale. La formule de rétroprojection permet-elle d'inverser la transformation de Radon ? Commenter.

III.2 Théorème de la tranche centrale

Démontrer que pour Φ donné, la transformée de Fourier 1D de $\widehat{f}(t, \mathbf{u_t})$ le long de la variable t est égale à la transformée $2D$ de $f(\mathbf{r})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t, \mathbf{u_t}) e^{-ikt} \mathrm{d}t = \iint f(\mathbf{r}) e^{-i(k\mathbf{u_t})\cdot\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{3}$$

ou encore

$$\mathrm{TF}_{1D(t)}(\widehat{f}(t, \mathbf{u_t}))[k] = \mathrm{TF}_{2D}(f(x,y))[k\mathbf{u_t}] \tag{4}$$

Dans le contexte de l'imagerie médicale, cette relation est appelée théorème de la tranche centrale. Elle relie la transformée de Fourier $2D$ d'une fonction à sa transformée de Radon.

Rappeler le sens de la transformée de Fourier d'une fonction d'une variable et de deux variables. Déduire du théorème de la tranche centrale une interprétation de la transformation de Fourier 2D en termes de transformation de Fourier 1D.

III.3 Formule d'inversion

Par soucis de concision, on choisit de noter la transformée de Fourier 1D (notation $\widetilde{f}$) de la transformée de Radon (notation $\widehat{f}$), le long de la variable t, de la façon suivante :

$$\widetilde{(\widehat{f})}(k, \mathbf{u_t}) = \mathrm{TF}_{1D(t)}(\widehat{f}(t, \mathbf{u_t}))[k]$$

Du théorème de la tranche centrale, démontrer la formule d'inversion de la transformée de Radon :

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |k| \widetilde{(\widehat{f})}(k, \mathbf{u_t}) e^{+i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u_t})k} \, \mathrm{d}k \, \mathrm{d}\Phi \tag{5}$$

III.4 Interprétation : rétroprojection filtrée

Cette section se propose d'interpréter la formule précédente, en particulier en relation avec l'opération de rétroprojection vue précédemment.

1. Que vaut l'expression suivante ?

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{(\widehat{f})}(k, \mathbf{u_t}) e^{+i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u_t})k} \, \mathrm{d}k$$

2. Interpréter alors l'expression suivante en terme de filtrage spatial.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |k| \widetilde{(\widehat{f})}(k, \mathbf{u_t}) e^{+i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u_t})k} \, \mathrm{d}k$$

3. Expliquer pourquoi on peut qualifier la formule d'inversion de la transformée de Radon de formule de rétroprojection filtrée. Expliquer alors le "défaut" de la formule de rétroprojection considérée au début de cette partie, et commenter à nouveau la figure 3.

IV Mise en œuvre de la tomographie par rayons X

En quoi une acquisition réelle diffère-t-elle du modèle discuté dans ce préceptorat ? On discutera en particulier l'origine de la limite de résolution des images obtenues par un scanner à rayon X.