Tutorat 1 de Mathématiques (2ème année)

10 et 19 Octobre 2011

Équations aux dérivées partielles

Compte-rendu à déposer svp le lundi à 17:00 dans mon casier.

Résumé

Le but du tutorat est de présenter quelques exemples d'équations de diffusion rencontrées en physique.

1 Équation de diffusion à en une dimension

(A) Considérons l'équation de diffusion à une dimension spatiale,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\Delta\phi. \tag{1}$$

Quelle est la solution "standard" ? Quelles sont les hypothèses utilisées à son obtention ?

(B) Transformation en une équation différentielle ordinaire (EDO). Montrez qu'il existe des solutions de l'Eq. (1) de la forme

$$\phi(x,t) = t^{\alpha}\, F(x\, t^{\beta})\ , \tag{2}$$

Donnez la valeur de β et l'EDO vérifiée par $F(s)$.

(C) On cherche une solution de l'Eq. (1) sous la forme (2) et telle que

$$M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,t)\, dx \tag{3}$$

soit indépendant de t (c'est par exemple le cas si $\phi(x,t)$ est une distribution de probabilité). Déterminer alors α et la fonction $F(s)$.

2 Équation de diffusion à plusieurs dimensions : solution générale

(A) Nous continuons sur l'équation de diffusion, cette fois à trois dimensions ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$), avec un terme de source $f(\mathbf{x},t)$ donnée,

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t) - D\Delta\phi(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t). \tag{4}$$

La solution générale du cas unidimensionnel est donnée dans le cours. Quelle structure possèdent les intégrales spatiales ? Comment généraliser ce résultat à plusieurs dimensions ?

(B) Nous cherchons maintenant à généraliser cette solution aux cas de la diffusion dans un volume $V \subset \mathbb{R}^3$ avec des conditions aux limites imposées sur le bord ∂V. Nous allons trouver

1. les deux termes de la partie (A) : le terme initial et le terme de source,
2. un terme supplémentaire, dû à la condition au bord imposée sur ∂V.

Pour obtenir ce terme supplémentaire, écrivez la solution sous la forme $\phi(\mathbf{x},t) = \int_0^\infty ds \int_V d\mathbf{y}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t-s)\phi(\mathbf{y},s)$. En utilisant la fonction de Green $K(\mathbf{x},\mathbf{y},t-s)$, qui est une solution de l'équation adjointe de l'équation de diffusion,

$$-\frac{\partial}{\partial s}K(\mathbf{x},\mathbf{y},t-s) - D\Delta_{\mathbf{y}}K(\mathbf{x},\mathbf{y},t-s) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t-s). \tag{5}$$

vous pouvez remplacer les fonctions delta dans la représentation intégrale de $\phi(\mathbf{x},t)$ ci-dessus . Après une intégration par partie (en temps et en espace) on obtient les deux termes de (A) et le term de bord sous forme d'une intégrale de surface (voir l'indication ci-dessous).

Peut-on utiliser la même méthode avec la solution fondamentale, qui est une fonction de Green [solution de l'Eq. 5] particulière, puisqu'elle ne dépend que de la différence $\mathbf{x}-\mathbf{y}$? Quelle signification possède cette dépendance en $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, i.e. quel type de problème résout-elle ?

Cette méthode fonctionne également pour d'autres types d'équations, pas nécessairement parabolique mais aussi elliptique, comme par exemple les équations de Poisson, de Stokes, etc.

Indication : Utilisez la deuxième identité de Green,

$$\int_V d\mathbf{x}\big[g(\mathbf{x})\,\Delta f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\,\Delta g(\mathbf{x})\big] = \oint_{\partial V} dA(\mathbf{x})\,\mathbf{N}\cdot\big[g(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{x})\big], \tag{6}$$

où $\mathbf{N}$ est le vecteur normal, orienté vers l'extérieur. Cette identité est le résultat de deux intégrations par partie.

(C) Refaites une partie du calcul précédent pour le cas d'un volume qui dépend du temps, $V(t) \subset \mathbb{R}^3$. C'est le cas, par exemple pour la diffusion dans un volume dont les parois sont déplacées de l'extérieur avec une vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$. Cela fait apparaitre une dernière intégrale dans la solution générale, qui est maintenant complète.

Indication : Dans $\mathbb{R}$, si on intègre sur un segment qui dépend du temps, la dérivée donne

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{df}{dt}\,dx + \frac{da}{dt} f(a,t) - \frac{db}{dt} f(b,t) \tag{7}$$

La formule à plusieurs dimensions est

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \frac{df}{dt}\,d\mathbf{x} + \oint_{\partial V(t)} dA(\mathbf{x})\mathbf{u}\cdot\mathbf{N} f(\mathbf{x},t), \tag{8}$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ est la vitesse avec laquelle la frontière se déplace localement.

3 Équation de Burgers

(A) Discutez les solutions de l'équation de transport convectif :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

où c est un champ $c(x,t)$. Quelles sont en particulier les caractéristiques de cette équation ?

(B) Qu'arrive-t-il si on considère $c = v$? Les singularités peuvent être lissées par ajout d'un petit terme diffusif. Celui-ci change la nature de l'EDP, qui d'hyperbolique devient parabolique. On reçoit l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{10}$$

(C) Chose inhabituelle pour une équation aux dérivées partielles nonlinéaire, l'équation de Burgers admet des solutions analytiques. Construisez la solution générale en introduisant ϕ tel que

$$v = -2\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi \tag{11}$$

(transformation de Hopf et Cole). Écrivez l'équation de Burgers en fonction de ϕ. La substitution se fait en trois étapes (1) $v = -2\epsilon\partial_x\psi$, (2) Intégrer l'équation obtenue, (3) $\psi = \ln\phi$.