Tutorat 2 de Mathématiques (2ème année)

Calcul des variations

Dans le cours vous avez traité l'exemple d'une corde non-extensible qui est fixée à deux points de même hauteur. Ce tutorat approfondit cet exemple. Dans le cours la courbe qui d'ecrit la forme de la corde est définie par par la fonction $y = y(x)$. Ici on la courbe est définie par une équation paramétrique. Les points (x, y) de la courbe satisfont

$$y = y(t), \quad x = x(t)$$

I Préliminaires : Paramétrisation d'une courbe

Une courbe quelconque dans l'espace peut être décrite de plusieurs manières : Une manière est de la paramétrer, donc d'introduire un paramètre $t \in \mathbb{R}$ le long de la courbe et de donner les coordonnées (cartésiennes) $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ comme fonctions du paramètre. Chaque intégrale sur la courbe peut être exprimée comme une intégrale sur ce paramètre.

(A) Donnez l'élément infinitésimal de longueur pour une paramétrisation quelconque. Montrez alors que la longueur totale d'une courbe est invariante sous un changement de paramétrisation $\bar{\mathbf{r}}(t) := \mathbf{r}(t^2)$. En fait on peut montrer que cela est le cas pour tout changement de paramétrisation.

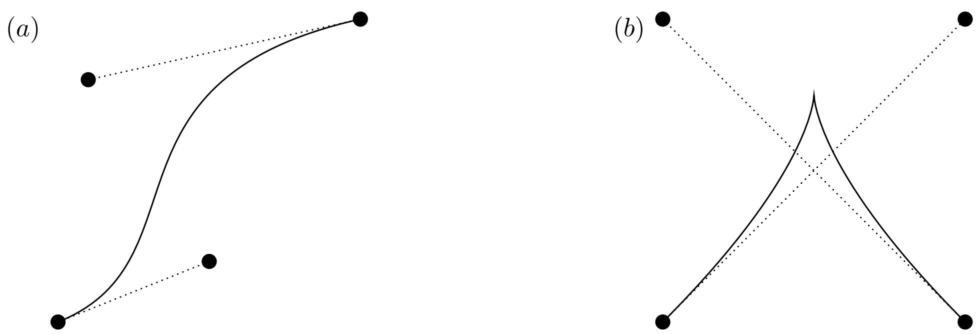

Figure 1 – Deux courbes de Bézier, avec points de contrôle indiqués. (a) $r_0 = (0, 0)$, $r_1 = (0.5, 0.2)$, $r_2 = (0.1, 0.8)$, $r_3 = (1, 1)$. (b) $r_0 = (0, 0)$, $r_1 = (1, 1)$, $r_2 = (0, 1)$, $r_3 = (1, 0)$.

(B) Considérez le cas d'une courbe de Bézier cubique, $C = \{\mathbf{r}(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$, qui est donné par le polynôme cubique,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{r}_1(1-t)^2 t + 3\mathbf{r}_2(1-t)t^2 + \mathbf{r}_3 t^3. \tag{1}$$

Les points $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^2$ déterminent cette courbe, ils servent comme guides géométriques, comme montre bien la figure 1, où ils sont indiqués par cercles. Le cas (a) est bien régulier. Le cas (b) montre un problème de la paramétrisation : La courbe possède un point de rebroussement dans lequel la tangente n'est pas continue. Calculer la valeur t à ce point de rebroussement. Tracer la norme du vecteur tangentiel dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$. Quelle condition (suffisante) doit être imposée sur la paramétrisation pour éviter des points de rebroussement ?

II Variations sur la corde pendante

II.1 La corde extensible d'après la loi de Hooke : Variation par deux fonctions

Nous allons décrire une corde extensible et élastique : L'énergie élastique locale doit suivre la loi de Hooke, avec l'énergie locale proportionnelle au carré de l'allongement de chaque élément infinitésimal. La corde est fixée aux deux extrémités et soumise à la gravitation.

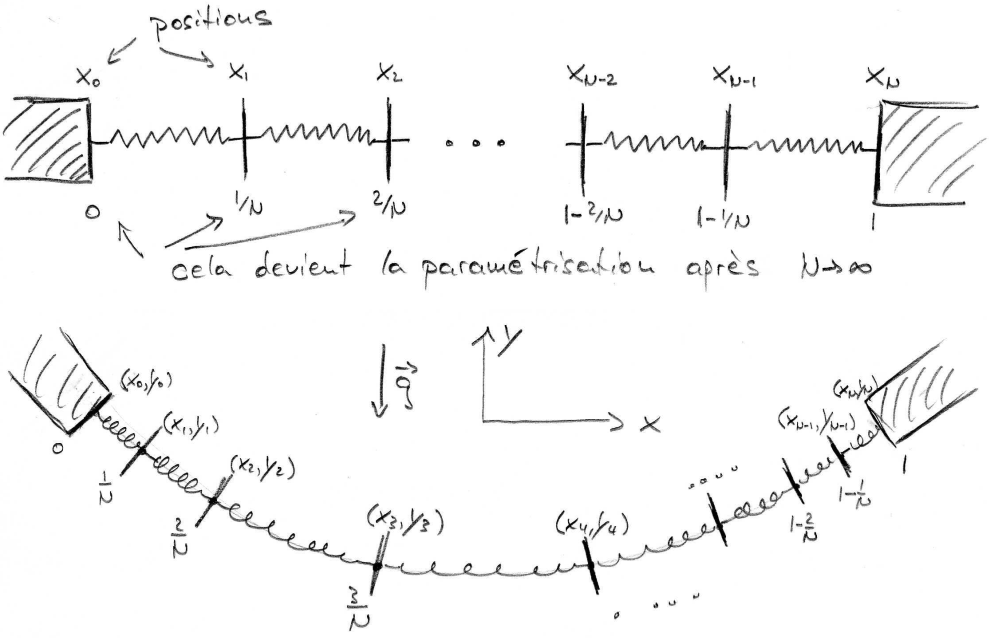

FIGURE 2 – Chaine élastique de N ressorts. Haut : Exemple unidimensionnel. Bas : Example bidimensionnel sous gravité.

(A) On trouve l'énergie élastique d'une corde avec une constante élastique k de la façon suivante :

(a) Écrire d'abord l'énergie élastique pour une chaine de N ressorts identiques en fonction des coordonnées $(x_1, y_1), \ldots, (x_i, y_i), \ldots, (x_N, y_N)$ (voire figure 2). A fin que l'ensemble de la chaine ait la constante élastique k, quelle doit être la constante élastique de chaque ressort ?

(b) Prendre ensuite la limite continue $N \to \infty$ pour exprimer l'énergie élastique comme une fonctionnelle des deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de la paramétrisation. (Input : Utiliser $1/N \to \mathrm{d}t$ et $\frac{x_{i+1}-x_i}{1/N} \to \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$)

(B) On va maintenant exprimer l'énergie potentielle de gravitation comme une fonctionnelle, en utilisant deux méthodes différentes. On suppose que la masse totale de la ligne est M :

(a) En général, l'énergie potentielle gravitationnelle s'écrit comme

$$E_g = g \int_0^1 dt \, \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \, \rho(t) \, y(t). \tag{2}$$

Ici, au cas d'un élastique, la densité de masse par unité de longueur n'est pas constante. Pour obtenir $\rho(t)$, faites une discrétisation comme dans la figure 2, supposé que chaque ressort a la même masse et qu'il n'y a pas de masses supplémentaires entre les ressorts. Calculez la densité ρ_i de masse pour chaque ressort i. Prenez ensuite la limite continue.

(b) On utilise l'hypothèse qu'il y a des masses identiques entre les ressorts, qui eux n'ont pas de masse, voir figure 2. Les positions des masses sont $(x_1, y_1), \ldots, (x_i, y_i), \ldots, (x_N, y_N)$. Cela donne le même résultat comme dans (a), sans utiliser l'équation (2).

(C) Montrez alors que la forme de la corde est parabolique, en cherchant les deux variations par les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Pourquoi sont-ils indépendant ?

III La corde extensible, semblable à une surface libre

Calculez de nouveau le problème de la corde extensible, mais cette fois-ci sans supposer qu'elle est en élastique de Hooke. Au lieu de cela, l'énergie potentielle de déformation locale est proportionnelle à l'allongement linéaire (et non quadratique). C'est le cas par exemple pour une interface entre liquide et air avec une tension de surface.

(A) Montrez alors qu'il n'existe pas de solution stationnaire à ce problème.

IV De la chainette à la corde élastique

Dans cette partie du tutorat on va combiner les deux résultats sur la chaine inextensible du polymaths et sur la corde élastique. On va résoudre le cas générale qui interpole entre les deux.

(A) La corde élastique qu'on a considéré dans II.1 n'a pas de longueur au repos (si elle n'est pas attachée). On considère maintenant une corde qui a la longueur L_0 au repos et qui peut être étirée. Répétez la discrétisation de l'énergie élastique comme dans II.1 en supposant que chaque ressort a une longueur L_0/N au repos. Faites ensuite la limite continue.

(B) Réutilisez l'expression pour l'énergie gravitationnelle trouvée ci-dessus.

(C) Procédez avec la variation de la somme des deux énergies, pour montrer que la forme de la courbe est donnée par

$$y''(x) = \frac{Mg}{kC} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{L_0 + C\sqrt{1 + y'^2(x)}}. \tag{3}$$

C est une constante qui apparait dans la variation par x.

(D) Discutez les deux limites, (i) $L_0 \to 0$ et (ii) $k \to \infty$.