Mouvement Brownien

I. Théorie de Langevin

Sous l'effet de l'agitation thermique, les molécules en solution et les particules en suspension dans un fluide sont animées d'un mouvement incessant et aléatoire appelé mouvement Brownien (Brown, 1827), décrit successivement par A. Einstein (1905), M. von Smoluchowski (1906), P. Langevin (1908), et étudié expérimentalement par J. Perrin.

On note $\vec{r}$ la position du centre de gravité d'une particule de masse M et $\vec{F}$ la force totale que les molécules de solvant exercent sur cette particule. Langevin a proposé de décomposer $\vec{F}$ en une composante moyenne $\langle \vec{F} \rangle = -\zeta \frac{d\vec{r}}{dt}$ décrivant la friction du fluide (ζ est le coefficient de friction), et une composante aléatoire $\vec{f}(t)$ indépendante de la vitesse et de la position, soit:

$$\vec{F} = \langle \vec{F} \rangle + \vec{f}(t)$$

Par simplicité on raisonnera ici à une dimension, notée x. On suppose la force aléatoire de moyenne nulle, et décorrélée dans le temps:

$$\langle f(t) \rangle = 0$$

$$\langle f(t) f(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t')$$

Ecrire l'équation qui régit la position de la particule et la résoudre. Que vaut le déplacement quadratique moyen ? Quelle échelle de temps τ apparaît naturellement ? Développer l'expression de $\langle x^2 \rangle$ pour des temps courts et longs devant τ. Que vaut τ pour une particule de rayon $b = 10$nm, de masse volumique $\rho = 1\text{gcm}^{-3}$, dont le coefficient de friction est donné par la loi de Stokes $\zeta = 6\pi\eta b$ dans un solant de viscosité $\eta = 10^{-3}$Pa.s.

II. Mouvement Brownien et marche aléatoire

La trajectoire d'une particule soumise à l'agitation thermique est décrite par une marche au hasard sur un réseau cubique : l'objet effectue N pas successifs de longueur a, le pas du réseau. L'orientation d'un pas est choisie au hasard, indépendamment de celle des pas déjà effectués. On note $\vec{R}$ le vecteur qui lie le début et la fin de la marche:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{a}_i$$

où $\vec{a}_i$ est le vecteur entre le pas i et le pas $i + 1$.

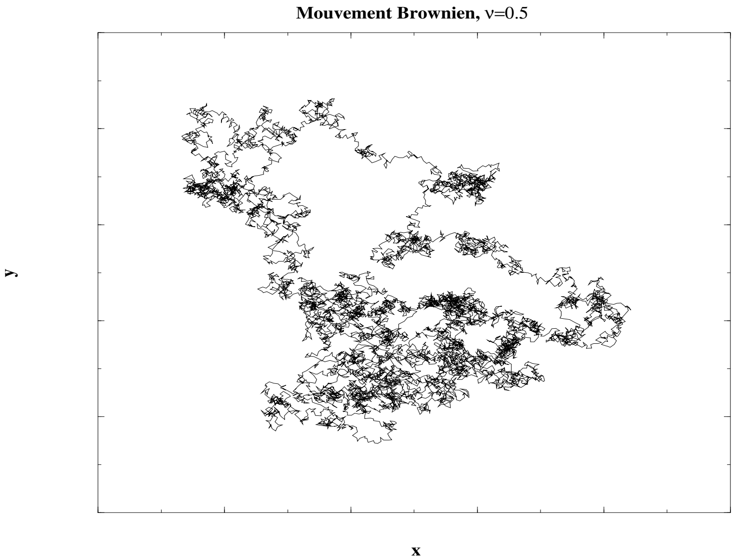

Figure 1: Exemple d'une mache aléatoire à deux dimensions.

Que vaut $\langle \vec{R} \rangle$? $\langle R^2 \rangle$?

Plaçons-nous maintenant à une dimension. Calculer le nombre de manières d'être après N pas à une position $x = na$ sur l'axe x de la marche. En déduire la probablité $p_N(x)$ correspondante (on utilisera l'approximation : $\ln N! \simeq N \ln N - N$).

III. Cinétique d'agrégation

On appelle *fractal* un objet dont la structure reste la même quelle que soit l'échelle d'observation. Si la taille de l'objet est R, et si l'objet peut être considéré comme formé de N unités élémentaires de taille a, on observe alors:

$$N \propto \left(\frac{R}{a}\right)^{d_F}$$

qui définit la dimension fractale d_F de l'objet.

Quelle est la dimension fractale d'une marche aléatoire ?

On suppose que la concentation de la solution considérée est c. Combien de particules chacune des particules Browniennes de taille b de la solution rencontre-t-elle au cours d'un temps t ? Quand deux particules se rencontrent, elles s'agrègent instantanément. Comment varie $c(t)$ au début de l'agrégation ? La cinétique d'agrégation dépend-elle de la taille des particules ?