Entropie(s) et ensemble d'Edwards

Dans ce tutorat, nous allons discuter de l'entropie micro-canoniquem ainsi que d'une de ses généralisation proposée par Sir Sam Edwards pour les milieux granulaires., très discutée dans la recherche fondamentale actuelle. Pour commencer, nous allons (re-)voir certaines proprietes de l'entropie.

1. Rappel préliminaire

Volume élémentaire de l'espace des phases : Souvenez-vous du calcul de la fonction de partition des oscillateurs classique ET quantique dans le précédant tutorat. Dans la limite des grandes températures, montrez que les deux expressions ne diffèrent (à une constante près) que d'un facteur numérique multiplicatif. Quelle est la signification de ce facteur ? Dorénavant, nous devrons tenir compte de ce facteur multiplicatif dans nos calculs "classiques" ; montrez que cela est possible avec une simple modification de la définition de la fonction de partition. Montrez aussi que la fonction de partition ainsi obtenue est bien sans dimension.

2. Le Gaz Parfait

a) Considérez un gaz parfait sans interaction constitué de N particules monoatomiques discernables dans un cube de volume V. La fonction de partition de ce système, dans la limite classique et en utilisant le pré-facteur dérivé dans la première partie, s'écrit

$$Z = \frac{1}{N!}\int e^{-\beta\mathcal{H}}\frac{\mathrm{d}^{3N}x\mathrm{d}^{3N}p}{(2\pi\hbar)^{3N}} \tag{1}$$

avec $\mathcal{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}$ (le facteur $N!$ est du à l'indicernabilité des particules au niveau quantique). Écrire (sans calcul !) l'énergie moyenne du système à l'aide du théorème de l'equipartition. Calculez l'entropie du système en fonction de N, m et V, et montrez que (formule de Sackur-Tetrode) :

$$S(E,V,N) = Nk_b\left[\log\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\log\left(\frac{E}{N}\frac{m}{3\pi\hbar^2}\right) + cst\right] \tag{2}$$

b) On considère deux gaz de N_1 et N_2 particules de masse m_1 et m_2, dans deux récipients de volume V_1 et V_2 séparés par une paroi MOBILE. Maximisez l'entropie totale des deux systèmes, et en déduire une relation entre les rapports E_1/E_2, V_1/V_2, et N_1/N_2.

c) Considérons une point de vue equivalent : montrez que l'égalité des températures et des pressions [1] entraine forcement $E_1/E_2 = V_1/V_2 = N_1/N_2$.

[1] On rappelle que $\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$ et $\frac{p}{T} = \frac{dS}{dV}$.

3. L' entropie d'Edwards (examen Juin 2007)

En 1989, Sir Sam Edwards a proposé une description de la statique des milieux granulaires inspirée de l'ensemble microcanonique. On considère un ensemble de N grains *indéformables* enfermés dans un récipient de volume V, et soumis à une forte vibration extérieure. On suppose que cette vibration permet aux grains d'explorer l'ensemble des configurations possibles avec une probabilité égale.

1. Préciser l'ensemble des configurations dont il s'agit. Quelle est la quantité conservée par la dynamique, identique pour toutes les configurations accessibles ?

2. On notera ϕ la fraction volumique occupée par les $N \gg 1$ grains solides, supposés indiscernables, et $\mathcal{N}(\phi)$ le nombre de configurations à ϕ fixé. On définit $S(\phi, N) = \ln \mathcal{N}(\phi)$. Justifier que $S(\phi, N) = Ns(\phi)$. Par analogie avec un gaz parfait, que vaut $s(\phi)$ quand $\phi \ll 1$ [2] ? Deviner physiquement, et représenter graphiquement, la forme qualitative de $s(\phi)$.

3. On divise le recipient en deux parties, de volume V_1 et V_2, séparées par une paroi mobile, avec $V_1 + V_2 = V$. Dans la partie (1) on met N_1 grains, chacun de volume v_1, et dans la partie (2) N_2 grains, chacun des volume v_2, tel que le volume solide occupé soit identique : $N_1 v_1 = N_2 v_2$. En utilisant l'hypothèse microcanonique, expliquer comment calculer V_1 et V_2 : quelle est la quantité intensive identique dans les deux parties ? Effectuer le calcul en supposant que ϕ_1 et ϕ_2 sont proches de la densité maximale ϕ_m, où $s(\phi) \approx A(\phi_m - \phi)^\alpha$ avec $\alpha > 0$. On choisira $\alpha = 1$. Le résultat vous paraît-il surprenant ?

4. On considère un grand volume $\mathcal{V}$ où se trouvent N grains identiques, qui occupent une fraction volumique ϕ. On isole par la pensée un amas compact de n grains, avec $1 \ll n \ll N$. En s'inspirant de la construction du poids de Boltzmann dans l'ensemble canonique, écrire la probabilité $P(V)$ pour que ces n grains occupent un volume total V. Quel est le volume V^* le plus probable ? Donner l'analogue de la fonction de partition Z. Edwards a proposé d'appeler compactivité X l'analogue de la température T pour l'ensemble canonique. Que calcule t-on via $\partial \ln Z / \partial X$?

[2] En utilisant aussi le volume v de chaque particule.