ENS Cachan - UPMC

Introduction à la Physique Statistique LP357
2013-2014

TD 1 : Grands nombres et espace des phases

1 Pile ou face

Carla dispose d'un grand nombre N de pièces de monnaie identiques pour lesquelles la probabilité de tomber du côté pile vaut p et du côté face $q = 1 - p$. Elle les jette en l'air.

▷ **1-1** Quelle est la probabilité $P_N(k)$ de trouver k pièces tombées du côté pile. Vérifier la normalisation de la distribution de probabilité.

▷ **1-2** Calculer la valeur moyenne du nombre de pièces tombées du côté pile et l'écart quadratique moyen.

2 Inspirations

Chacune de nos inspirations contient quelques molécules du dernier souffle de Jules César. Évaluer le nombre de molécules en question. Après réflexion (quantique) que dire de cette affirmation ?

3 Formule de Stirling

On veut démontrer la formule de Stirling, valable pour $N \gg 1$

$$N! \simeq N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}, \tag{1}$$

via la méthode dite "du col". Pour ce faire, on utilise la représentation intégrale de la factorielle :

$$N! = \Gamma(N+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^N \, dt \ . \tag{2}$$

▷ **3-1** Comment se comporte la fonction $e^{-t}t^N$ pour $N \gg 1$? Écrire $N!$ sous la forme :

$$N! = \int_0^\infty e^{-f(t)} \ dt, \tag{3}$$

où $f(t)$ est une fonction présentant un minimum en un point t_0 que l'on précisera.

▷ **3-2** Déterminer une approximation de $f(t)$ au voisinage de son minimum. En déduire l'approximation (1) de $N!$. Est-elle correcte pour $N = 10$, 100, 10^{23} ?

4 Fluctuations de densité

Dans des conditions normales de température et de pression, un récipient de volume $V = 22,4$ litres contient N particules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne. Soit k le nombre de particules contenues dans un sous-volume $v = 1$ mm^3 du récipient.

▷ **4-1** Calculer le nombre moyen $< k >$ de particules et les fluctuations autour de cette valeur ?

▷ **4-2** On se place à la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $V \to \infty$ tels que la densité N/V est constante). En considérant le nombre de particules comme une variable continue, montrer en utilisant la formule de Stirling que la distribution de probabilité de k se comporte comme une loi gaussienne au voisinage de $< k >$ (on posera $k =< k > +s$ avec $s \ll N$). Ce résultat est-il surprenant ?

5 Dynamique dans l'espace des phases

Une balle de masse m est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h.

▷ **5-1** Donner le Hamiltonien de ce système. Écrire et intégrer les équations de Hamilton.

▷ **5-2** En supposant que la balle rebondit élastiquement sur le sol, dessiner le portrait de phase correspondant (trajectoire dans l'espace des phases).

Des particules identiques, de masse m et sans interactions entre elles, se déplacent verticalement dans le champ de pesanteur g. À $t = 0$ leurs points représentatifs dans l'espace des phases se trouvent dans un rectangle dont les quatre sommets ont pour coordonnées $A(q_A,\, p_A)$, $B(q_A + \Delta q,\, p_A)$, $C(q_A + \Delta q,\, p_A + \Delta p)$ et $D(q_A,\, p_A + \Delta p)$.

▷ **5-3** Calculer les coordonnées des points A', B' et C' et D' représentant, à l'instant t, les particules qui se trouvaient initialement aux points A, B, C et D. Calculer les aires des domaines $ABCD$ et $A'B'C'D'$. Conclusion ?

6 Volume de l'hypersphère

Le but de cet exercice est de calculer le volume V_D d'une hypersphère de rayon R dans un espace à D dimensions. Un argument dimensionnel permet d'écrire $V_D = C_D R^D$, où C_D est le volume de l'hypersphère de rayon $R = 1$.

▷ **6-1** En déduire l'expression de la surface S_D de l'hypersphère de rayon R.

▷ **6-2** Représenter $V(r) = r^D$, où $0 \leq r \leq 1$, pour $D = 1, 2, 10$ et 100. Soit une hypersphère de rayon R et de densité massique uniforme ρ. Montrer que la masse de l'enveloppe de surface S_D et d'épaisseur $dR \ll R$ est du même ordre de grandeur que la masse totale de l'hypersphère lorsque D est grand ($D \sim 10^{23}$).

Reste à calculer la constante C_D.

▷ **6-3** Donner la valeur de l'intégrale gaussienne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. En déduire la valeur de $\displaystyle I_D = \prod_{i=1}^{D} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\ x_i^2} dx_i \right)$.

▷ **6-4** Effectuer le changement de variables $\displaystyle\sum_{i=1}^{D} x_i^2 = R^2$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{D} dx_i = dV_D$ et montrer que

$$I_D = \frac{D}{2} C_D \int_0^{+\infty} y^{D/2-1}\ e^{-y} dy \quad . \tag{4}$$

▷ **6-5** En utilisant la représentation intégrale de la factorielle, donnée par l'équation (2), en déduire que

$$C_D = \frac{\pi^{D/2}}{\left(\frac{D}{2}\right)!} \quad . \tag{5}$$

Vérifier ce résultat pour $D = 1, 2$ et 3, sachant que $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.