Mathématiques

examen final du mercredi 8 janvier 2014

Les différents problèmes sont indépendants. Durée de l'examen : 3h.
Des réponses concises mais précises sont demandées.

1 Intégrale sur un cercle

1. Soient $0 < a < b$ des réels strictement positifs et C_R le cercle centré à l'origine de $\mathbb{C}$ et de rayon R parcouru dans le sens direct. Calculer, selon les valeurs de R ($R \neq a, b$), l'intégrale

$$I(R) = \int_{C_R} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} \tag{1}$$

2 Calculs d'intégrales

1. Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} \qquad\qquad I_2 = \int_0^{+\infty} dx\, \frac{1-\cos x}{x^2} \tag{2}$$

Pour I_2, on pourra considérer l'intégrale sur un contour astucieusement choisi de la fonction complexe $f(z) = \left(1 - e^{iz}\right)/z^2$.

Soit l'intégrale

$$I_3(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour} \qquad -1 < \alpha < 1 \tag{3}$$

2. Quelles limites attend-on pour I_3 lorsque $\alpha \to 0$ et $\alpha \to \pm 1$?
3. Calculer $I_3(\alpha)$.

Soient les intégrales

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

et la fonction $f(z) = (\ln z)^2/(1+z^2)$. On considère l'intégrale dans le plan complexe de $f(z)$, suivant le contour représenté Fig. 1, avec $\varepsilon < 1$ et $R > 1$.

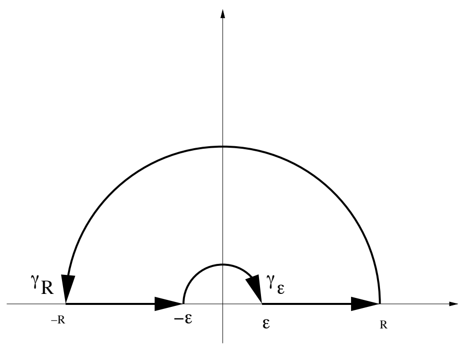


Figure 1 – Contour (en traits noirs) d'intégration dans le plan complexe.

4. Choisir une coupure adaptée pour la fonction $\ln z$.
5. Calculer l'intégrale complexe (Fig. 1) à l'aide du théorème des résidus.
6. En vous appuyant sur les lemmes de Jordan, relier les intégrales I_4, I_5 et $\int_0^\infty dx/(1+x^2)$.
7. En déduire les valeurs de I_4 et I_5.

3 Calcul d'une somme

1. Montrer, en utilisant la méthode de votre choix (séries de Fourier, intégrale dans le plan complexe, autre), l'identité suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{5}$$

4 Polynômes de Chebyshev

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[-1, 1]$ telles que

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < +\infty$$

est sommable. On définit sur $\mathcal{H}$ le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} dx\, \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6}$$

1. Montrer que si $f, g \in \mathcal{H}$, alors $\langle f, g \rangle$ est fini (ne diverge pas).
2. Montrer que l'ensemble des polynômes appartient à $\mathcal{H}$; que l'ensemble $\mathcal{C}^0[-1, 1]$ des fonctions continues de $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ appartient aussi à $\mathcal{H}$.
3. On admet que l'ensemble $\mathcal{C}^0[-1, 1]$ est dense dans $\mathcal{H}$. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, expliquer comment on peut construire une base de Hilbert pour $\mathcal{H}$.

Soient les fonctions

$$T_n(x) = \sqrt{2/\pi} \cos(n \arccos x) \qquad\qquad T_0(x) = 1/\sqrt{\pi}.$$

4. En utilisant la formule de de Moivre [1] et le binôme de Newton, montrer que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n.
5. Soient les fonctions $\Phi_n(\theta) = \cos n\theta$. Vérifier que

$$\int_0^{\pi} d\theta\, \Phi_n(\theta)\Phi_m(\theta) = \begin{cases} (\pi/2)\delta_{nm}, & \text{si} \quad n, m \neq 0, \\ \pi\delta_{0,n}, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7}$$

6. En déduire, à l'aide d'un simple changement de variable appliqué aux Eqs. (7), que les polynômes de Chebyshev $T_n(x)$ sont orthonormaux pour le produit scalaire Eq. (6).
7. Conclure que les polynômes de Chebyshev $T_n(x)$ forment une base de Hilbert de $\mathcal{H}$.

5 Transformée de Fourier de la gaussienne

On cherche dans cet exercice à calculer la transformée de Fourier de la gaussienne,

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2+ikx} \tag{8}$$

On considérera dans ce qui suit le cas $k > 0$.

1. Rappeler la valeur de cette intégrale pour $k = 0$, c'est-à-dire $\tilde{f}(0)$.

On introduit la fonction complexe $f(z) = e^{-z^2}$.

2. Quel est le domaine d'holomorphie de f ? f possède-t-elle des pôles ?

1. $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Soit l'intégrale

$$J_R = \int_{\gamma_R} dz\, e^{-z^2},$$

où γ_R est le rectangle de $\mathbb{C}$ dont les sommets A, B, C, D ont respectivement pour affixes

$$A : (R, -ik/2), \qquad B : (R, 0), \qquad C : (-R, 0), \qquad D : (-R, -ik/2)$$

3. Calculer J_R à l'aide du théorème des résidus.
4. En effectuant des majorations, trouver les limites des intégrales le long des segments AB et CD lorsque $R \to +\infty$.
5. En déduire la valeur de $\tilde{f}(k)$.
6. Comment déduit-on le résultat pour $k < 0$?

6 Développement en série entière

1. Soit la fonction $f(z) = \ln(1+z)$. Rappeler les propriétés d'holomorphie de cette fonction. Préciser ces différentes définitions possibles.
2. Soit le développement en série

$$f_2(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}.$$

   Montrer que f_2 définit une fonction holomorphe. Préciser ses domaines de définition et d'holomorphie.
3. Montrer que f_2 coïncide avec f sur son domaine d'existence.

7 Formule de Cauchy

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé ($|z| \leq 1$), et f une fonction holomorphe dans U. On suppose que $f(0) = 1$ et que $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f possède au moins un zéro à l'intérieur du disque unité.

   Pour montrer ce résultat, on pourra raisonner par l'absurde et appliquer la formule de Cauchy à $1/f$ en $z = 0$ pour un chemin γ bien choisi. On conclut en majorant $|1/f(0)|$.

Annexe

On rappelle la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \qquad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On rappelle la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

où γ est un chemin simple fermé contenant z.

La représentation de Fourier d'une fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ est

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

avec les coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Par ailleurs, on a l'égalité de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Mathématiques

examen final du lundi 5 janvier 2015

Les différents problèmes sont indépendants. Durée de l'examen : 3h.
Des réponses concises mais précises sont demandées.

1 Question de cours

1. Expliciter le théorème de Cauchy.

2 Contours circulaires

Calculer :

1. $\int_\gamma \frac{z}{(z^2+1)\cos z}\mathrm{d}z$ où γ est le cercle $\{|z| = \pi\}$.
2. $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$ où γ est le cercle $\{|z| = 2\}$.

3 Pôles et résidus

1. Trouver les pôles dans le plan complexe et les résidus correspondants pour les fonctions suivantes

$$\tanh z \qquad \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 \tag{1}$$

4 Série de Fourier

f est une fonction périodique, de période 12, définie de façon suivante sur l'intervalle $-6 < t < 6$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -6 \leq t \leq -3 \\ t+3 & -3 \leq t \leq 0 \\ 3-t & 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & 3 < t \leq 6 \end{cases} \tag{2}$$

1. La dessiner et trouver son développement en séries de Fourier en distinguant a_{2n} et a_{2n+1}.

5 Calculs d'intégrales

1. Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x-1}{[(x-1)^2+1](x-i)}. \tag{3}$$

Déduire du résultat pour I_2 la valeur de l'intégrale

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x-1}{[(x-1)^2+1](x^2+1)}.$$

2. Calculer l'intégrale angulaire suivante

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(a+b\cos\phi)^2} \qquad a > b > 0$$

3. Calculer l'intégrale

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

6 Coupures indolores

On choisira dans tout cet exercice la détermination principale pour la fonction logarithme. Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{\ln z}$.

1. Dans quelle domaine de $\mathbb{C}$ la fonction f est-elle holomorphe ? Analytique ?
2. Que vaut l'intégrale de $f(z)$ sur le cercle de rayon 1 et de centre $z_0 = 3/2$ (parcouru une unique fois dans le sens direct) ?
3. Soit la fonction $g(z) = \frac{z^{1/4}}{\ln z}$, avec $z^{1/4} = e^{\frac{1}{4}\ln z}$. Quel est le domaine d'analyticité de g ?
4. Calculer $g(2)$ et $g(\pm i)$.
5. Déterminer le saut en $z = -1$, c'est-à-dire $\lim_{\varepsilon \to 0}\{g(-1 + i\varepsilon) - g(-1 - i\varepsilon)\}$.

7 Calcul d'une somme

On cherche à calculer la somme suivante

$$S(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\theta)}{n^2}, \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{4}$$

On introduit la fonction dans le plan complexe

$$f(z) = \frac{\cos(z\theta)}{z^2} \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

1. Donner les positions des pôles de la fonction f. Déterminer les résidus correspondants sauf en $z = 0$.
2. On intègre $f(z)$ suivant un cercle centré en $z = 0$ de rayon R. Déterminer, en utilisant un lemme de Jordan, la valeur de cette intégrale lorsque $R \to +\infty$.
3. Pour calculer le résidu en $z = 0$, on effectue un développement limité. En utilisant les développements suivants lorsque $z \to 0$

$$\cos(z\theta) = 1 - \frac{z^2\theta^2}{2} + \dots, \qquad \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \frac{\pi^2 z}{6} + \dots,$$

   déterminer le développement en série de Laurent pour $f(z)$ en $z = 0$. En déduire la valeur du résidu de f en $z = 0$ (coefficient c_{-1}).
4. Montrer, à partir des questions précédentes, que

$$S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

5. Donner le développement en séries de Fourier de $S(\theta)$.

Annexe

On donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Mathématiques S5

examen de seconde session du mardi 16 janvier 2015

Les différents problèmes sont indépendants. Durée de l'examen : 2h.
Des réponses concises mais précises sont demandées.

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES, TELEPHONES etc SONT INTERDITS.

1 Questions de cours

1. Expliciter les conditions de Cauchy-Riemann.
2. Expliciter la formule de Cauchy.

2 Nombres et fonctions complexes

1. Ecrire $z = \arccos(i\sqrt{8})$ sous la forme $z = x + iy$ où x et y sont réels. Expliciter chaque étape de votre calcul.
2. Exprimer toutes les valeurs de $(-64)^{1/4}$ en forme complexe.
3. Montrer que si $u(x, y)$ est la partie réelle d'une fonction analytique, alors son gradient est nul, c'est-à-dire
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$
4. Parmi les fonctions suivantes, la quelle est la partie réelle d'une fonction analytique $f(z)$?
$$\text{(i)}\ \ u(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y) \qquad\qquad \text{(ii)}\ \ u(x, y) = e^{2x}\cos y$$
Si la fonction est analytique, trouver la partie imaginaire correspondante.

3 Intégrales circulaires

On définit les fonctions suivantes

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2} \qquad f_2(z) = \frac{z}{z+1}$$

Calculer $I_i = \int_C f_i(z)dz$ avec $i = 1, 2$, où C est

1. la courbe $|z| = R$ ou $R \neq 1$. On discutera suivant la valeur de R.
2. la courbe $|z - 1/2| = r$. Encore une fois, on discutera suivant la valeur de r.

4 Pôles et Résidus

Trouver les pôles dans le plan complexe et les résidus correspondants pour les fonctions suivantes

$$\text{(i)} \qquad f(z) = \frac{1}{(1+z)(z+3)(z-2)}$$
$$\text{(ii)} \qquad f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$$

5 Calcul d'Intégrales

1. Calculer les intégrales suivantes (Noter que pour I_1 on pourra utiliser les résultats de l'exercice 4, partie ii)).

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}
\end{aligned}
$$

2. Montrer que

$$I_4 \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{4i} \int_c f(z) dz$$

où C est le cercle unitaire, et

$$f(z) = \frac{1+z^6}{z^3(z-\frac{1}{2})(z-2)}$$

Montrer que le résidu de $f(z)$ en $z = 1/2$ est égal à $-65/12$. Sachant que le résidu en $z = 0$ est égal à $21/4$, montrer que

$$I_4 = \frac{\pi}{12}.$$

6 Série de Fourier

La fonction f définie par

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -1 \qquad -\pi < x < 0 \\
&= +1 \qquad 0 < x < \pi
\end{aligned}
$$

est une fonction périodique.

– La dessiner et trouver son développement en séries de Fourier.
– Utiliser votre résultat pour montrer que

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Mathématiques

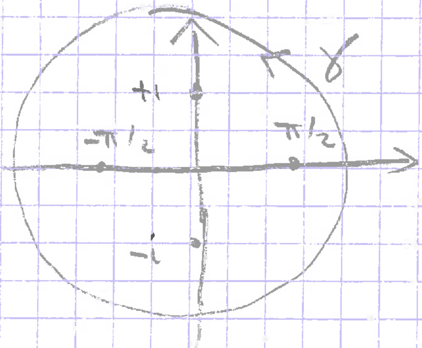
Correct examen final du 5 janvier 2015

1 Théorème de Cauchy

Soit Ω un ouvert simplement convexe et f holomorphe dans Ω, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour γ fermé.

2. Contours circulaires

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)\cos z} \qquad |z| = \pi$$



4 pôles

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{1}{2i\cos i} = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,1}$$

$+$

$$\mathrm{Res}(f, -i) = \frac{1}{-2i\cos(-i)} = -\frac{1}{2i\,\mathrm{ch}\,1}$$

$=0$

$$\mathrm{Res}(f, \pi/2) = -\frac{1}{(\pi^2/4+1)\sin \pi/2} = -\frac{1}{1+\pi^2/4}$$

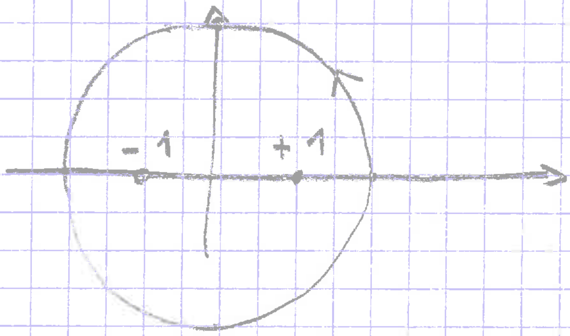
$+$

$$\mathrm{Res}\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{(\pi^2/4+1)\sin(-\pi/2)} = \frac{1}{1+\pi^2/4}$$

$=0$

$$\boxed{\text{donc } \int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)\cos z} = 0}$$

$$\int_\gamma \frac{z\,dz}{z^2-1}$$



$$\mathrm{Res}(f,1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{-1}{2\times(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\int_\gamma \frac{z\,dz}{z^2-1} = 2i\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2i\pi$$

3. pôles et résidus

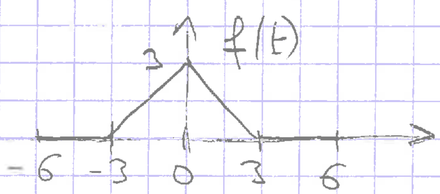
$\mathrm{th}\, z = \dfrac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}$ $\quad \mathrm{ch}\, z = 0$ pour $z_n = i\,\frac{\pi}{2}(1+2n)$ $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Res}(\mathrm{th}\, z, z_n) = \frac{\mathrm{sh}\, z_n}{\mathrm{sh}\, z_n} = 1$$

$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3 = \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{3}{z} + 3z + z^3$ $\quad$ pôle en $z=0$

résidu $= 3$

4. Séries de Fourier



$$b_n = \frac{1}{12}\int_{-6}^{6} dt\, f(t)\sin\left(nt\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

car f est une fct° paire

$$a_n = \frac{1}{12}\int_{-3}^{3} dt\,(3-|t|)\cos\left(nt\frac{\pi}{6}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{6}\int_0^3 dt\,(3-t)\cos\left(nt\frac{\pi}{6}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{6}\,\frac{6}{n\pi}\,\overbrace{\left[(3-t)\sin\left(nt\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^3}^{=0}$$

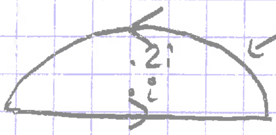
$$+\ \frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_0^3 dt\,\sin\left(nt\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{6}{n\pi}\left[1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

$$\boxed{a_n = \frac{6}{\pi^2}\,\frac{1-\cos(n\pi/2)}{n^2}}$$

$$a_{2n} = \frac{3}{2\pi^2}\,\frac{1-(-1)^n}{n^2} \qquad a_{2n+1} = \frac{6}{\pi^2}\,\frac{1}{(2n+1)^2}$$

5 - Calculs d'intégrales

1 - I_1 :



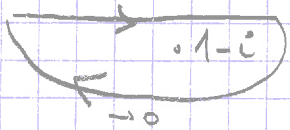
lemme de Jordan $\to 0$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} \qquad \mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Res}(f,2i) = \frac{1}{4i}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$I_1 = \frac{2i\pi}{2i}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right] = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

I_2 :



$$I_2 = -2i\pi\,\mathrm{Res}(f,1-i) = -2i\pi\,\frac{1}{2(1-2i)}$$

4

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{2+i}}$$

$$\frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1} \qquad I_3 = Im(I_2)$$

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2-i}{5} \qquad \boxed{I_3 = \frac{-\pi}{5}}$$

2 –

$$I_4 : \quad \frac{1}{(a+b\cos\phi)^2} \qquad z = e^{i\phi}$$

$$\frac{dz}{z} = i\, d\phi$$

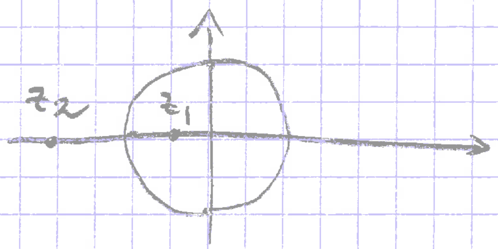
$$I_4 = \int_{\gamma\,;\,|z|=1} \frac{dz}{iz} \frac{1}{\left[a+\frac{b}{2}\left(z+1/z\right)\right]^2}$$

$$I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{i} \frac{4z}{b^2\left(z^2+\frac{2a}{b}z+1\right)^2}$$

$$z^2+\frac{2a}{b}z+1 = (z-z_1)(z-z_2)$$

$$z_1 = -\frac{a}{b}+\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1} \qquad z_2 = -\frac{a}{b}-\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}$$

$$-1 < z_1 < 0 \qquad z_2 < -1$$



$$I_4 = \frac{4}{i b^2} \int_\gamma \frac{dz \; z}{(z-z_1)^2 (z-z_2)^2}$$

$$f(z) = \frac{z}{(z-z_1)^2 (z-z_2)^2}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \left(\frac{z}{(z-z_2)^2} \right)'_{z=z_1} = \frac{1}{(z_1-z_2)^2} - \frac{2 z_1}{(z_1-z_2)^3}$$

$$= - \frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{2}{b} \sqrt{a^2-b^2}$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{2a}{b}$$

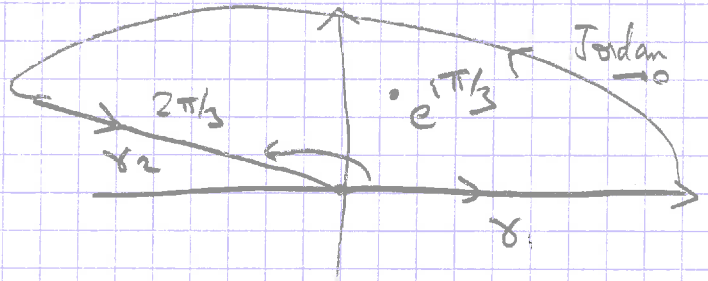
$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{2a}{b^2} \frac{b^3}{8} \frac{1}{(a^2-b^2)^{3/2}} = \frac{ab}{4} \frac{1}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

$$I_4 = \frac{\cancel{4}}{\cancel{i}\cancel{b}} 2\cancel{i}\pi \frac{a\cancel{b}}{\cancel{4}} \frac{1}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{I_4 = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}}$$

3.

I_5 :



$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = I_5 \qquad \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -e^{2i\pi/3}\, I_5$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^3}$$

$$I_5\left(1 - e^{2i\pi/3}\right) = 2i\pi \underbrace{\mathrm{Res}\left(f, e^{i\pi/3}\right)}_{\frac{1}{3e^{2i\pi/3}}}$$

$$I_5 = \frac{2i\pi}{3}\,\frac{1}{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}} = \frac{\pi}{3\sin(\pi/3)}$$

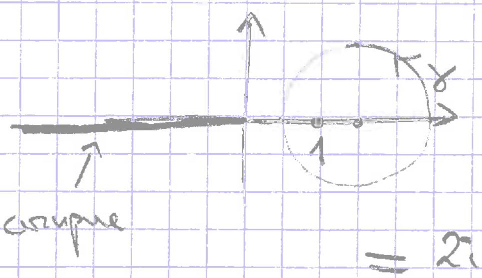
$$\boxed{I_5 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$$

6 – Coupures indolores

1 – $f(z) = \dfrac{1}{\ln z}$ est holomorphe ET analytique

sur $\mathbb{C} \setminus \{1;\ ]-\infty, 0[\ \}$

2 –



$$\int_\gamma \frac{dz}{\ln z} = 2i\pi \,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\ln z}, 1\right)$$

$$= 2i\pi \left.\frac{1}{1/z}\right|_{z=1} = 2i\pi$$

3 – $g(z) = \dfrac{z^{1/4}}{\ln z}$ $\quad g$ est analytique sur

$\mathbb{C} \setminus \{1,]-\infty, 0[\}$

(m̂ domaine que f)

4 – $g(2) = \dfrac{2^{1/4}}{\ln 2}$

$$g(i) = \frac{e^{\frac{1}{4}\ln i}}{\ln i} = \frac{e^{i\pi/8}}{i\pi/2} = -\frac{2i}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} g(i) &= -\frac{2i}{\pi}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ g(-i) &= g(i)^* \end{aligned}}$$

5 – $\ln(-1 \pm i\varepsilon) = \pm i\pi$

$$g(-1+i\varepsilon) = \frac{e^{i\pi/4}}{i\pi} \qquad g(-1-i\varepsilon) = \frac{e^{-i\pi/4}}{-i\pi}$$

$$g(-1+i\varepsilon) - g(-1-i\varepsilon) = \frac{1}{i\pi}\left(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right) = \frac{2}{i\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}/i\pi$$

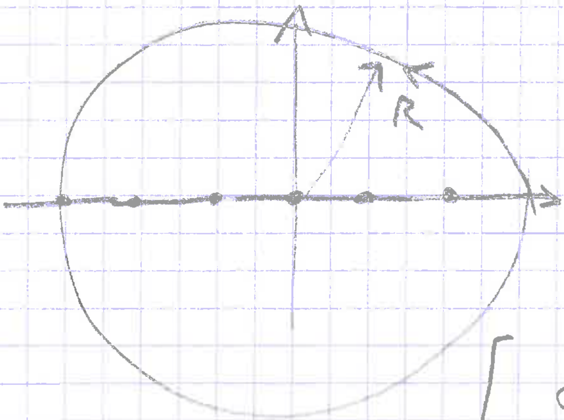
7. Calcul d'une somme

$$S(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\theta)}{n^2} \qquad -\pi \leq \theta \leq +\pi$$

soit $$f(z) = \frac{\cos(z\theta)}{z^2} \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

1 – pôles en $z = n$ $\quad n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\text{Res}(f,n) = \dfrac{(-1)^n \cos(n\theta)}{n^2}$
$n \neq 0$

2 –



$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \to 0$

lorsque $R \to +\infty$

car $z f(z) \to 0$ $\quad |z| \to +\infty$

[$\cos(z\theta)$ reste borné par $\sin(\pi z)$
car $-\pi \leq \theta \leq \pi$]

ainsi

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \text{Res}(f,n) + \text{Res}(f,0)$$

$$\boxed{2\, S(\theta) = -\text{Res}(f,0)}$$

3 –
$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2\theta^2}{2} + \dots\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{\pi^2}{6} z + \dots\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\theta^2}{2}\right) + O(z)$$

donc $\mathrm{Res}(f, 0) = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{\theta^2}{2}$

4 - $\boxed{S(\theta) = -\dfrac{\pi^2}{12} + \dfrac{\theta^2}{4}}$

5 - $\cos(n\theta) = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$

$\boxed{S(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \dfrac{(-1)^n}{n^2} e^{in\theta}}$ donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, S(\theta) e^{-in\theta} = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

par ailleurs $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, S(\theta) = 0}$