Chapitre I

Systèmes Dynamiques et Introduction au Chaos

Table des matières

Résumé

Le but de ce chapitre consiste à déterminer les conditions requises pour qu'un système physique possède un comportement chaotique. Nous verrons qu'il est nécessaire que celui-ci soit non-linéaire et qu'il ait au moins trois degrés de liberté. L'étude rigoureuse de ce type de système étant en général délicate, nous nous limiterons à une étude qualitative purement graphique. Pour cela, nous introduisons l'espace des phases, dont nous discutons les éléments remarquables.

Quelques définitions préliminaires permettent de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques. Elles sont illustrées par des exemples simples dont chacun permet de présenter un aspect de l'espace des phases.

Nous partirons de systèmes réguliers connus pour aller vers des systèmes chaotiques simples. Nous abordons les systèmes linéaires à deux degrés de liberté, les systèmes non linéaires, ceux qui possèdent quatre degrés de liberté et enfin ceux qui ont un comportement chaotique. Nous dégageons ainsi les conditions minimales nécessaires pour qu'un système présente un comportement chaotique.

Finalement, nous formulons les critères permettant de caractériser les mouvements chaotiques et les mouvements réguliers.

I.1 Définitions

I.1.1 Représentation d'un système physique

Pour décrire l'évolution dynamique d'un système physique, il est souvent commode d'en faire une représentation graphique. A chaque état du système est associé un vecteur $\vec{X}$. Suivre la dynamique du système correspond alors à observer l'évolution du vecteur $\vec{X}$ dans un espace vectoriel $\mathcal{E}$ appelé **espace des phases**. Cette évolution est décrite par un ensemble de n équations différentielles munies de conditions initiales :

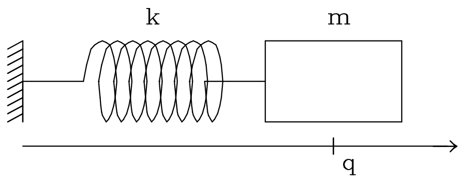

FIG. I.1: *L' oscillateur harmonique obtenu avec une masse* m *attaché à un ressort* k.

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = F(\vec{X}) \quad (+\text{c. i.} : \vec{X}_{(t=0)}) \tag{I.1}$$

L'application qui fait passer d'un vecteur de $\mathcal{E}$ à un autre au cours du temps s'appelle un *flot*.

I.1.2 Espace des phases, degré de liberté

Ce type d'équation vectorielle, qui décrit l'évolution déterministe d'un processus physique, est étudié par la théorie des équations différentielles ordinaires. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est caractérisé par sa dimension n. Elle constitue aussi le nombre de *degrés de liberté* du système dynamique considéré.

Cette notion d'espace des phases fut d'abord introduite en mécanique [1], où nous trouvons notre premier exemple de système dynamique : l'oscillateur harmonique à une dimension. Sa position est déterminée par la variable q. Pour connaître complètement son état dynamique, il faut préciser son impulsion p. L'espace des phases possède ainsi deux dimensions ; selon la définition que nous avons donnée, l'oscillateur harmonique possède deux degrés de liberté. Cette définition est différente de celle traditionnellement donnée en mécanique où un degré de liberté est associé à chaque couple (q, p) [1].

En général, la fonction F est différentiable un nombre suffisant de fois et peut être non linéaire. Dans le cas de l'oscillateur harmonique (une masse solidaire d'un ressort voir Fig.I.1) la fonction F prend la forme [1] :

$$\begin{cases} \partial q/\partial t &= p/m \\ \partial p/\partial t &= -kq \end{cases} \tag{I.2}$$

[1]La formulation habituelle est donnée par une équation avec une dérivée seconde : $m\ddot{q} + kq = 0$. Nous lui nous préférons la forme de deux équations aux dérivées premières qui met en valeur chacune des variables de l'espace des phases

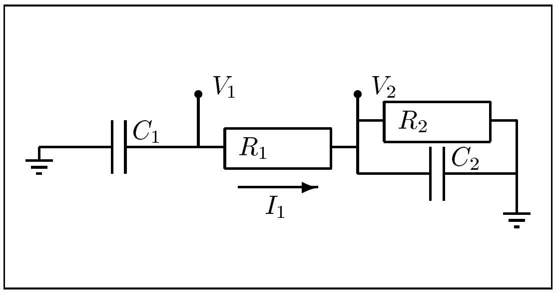

FIG. I.2: *Circuit électronique à deux degrés de liberté.*

I.1.3 Points fixes, sous espaces invariants

Le comportement d'un système dynamique s'étudie en caractérisant ses points d'équilibre, également appelés *points fixes* :

$$\frac{d\vec{X}_0}{dt} = \vec{0} = F(\vec{X}) \quad . \tag{I.3}$$

Leur stabilité est étudiée en approximant F au voisinage de $\vec{X}_0$ par une application linéaire.

On se ramène donc à l'étude d'un système linéaire :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \mathcal{L}_{X_0}(\vec{X}) \tag{I.4}$$

où $\mathcal{L}$ est l'application tangente à F en $\vec{X}_0$. Valeurs et vecteurs propres de $\mathcal{L}$ déterminent l'évolution du système dans le voisinage de $\vec{X}_0$.

I.2 Systèmes dynamiques linéaires

La notion de système dynamique est très générale : elle peut s'appliquer à des systèmes d'origine mécanique, électronique, chimique, thermique, etc. Pour éclairer les définitions que nous venons de donner, et en particulier pour expliciter les différents types de points fixes, nous nous proposons de les illustrer à l'aide de quelques exemples simples tirés de la mécanique et de l'électronique.

I.2.1 Circuit à deux condensateurs

Considérons le circuit de la figure I.2 qui contient deux résistances et deux condensateurs. La connaissance des tensions V_1 et V_2 à un instant donné, permet de prédire complètement l'évolution du circuit.

En utilisant les relations : $V_1 = RI_1 + V_2$, $I_1 = V_2/R + CdV_2/dt = -CdV_1/dt$, il est facile de montrer que les équations régissant ce système dynamique sont :

$$\left\{ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{RC} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \right. \tag{I.5}$$

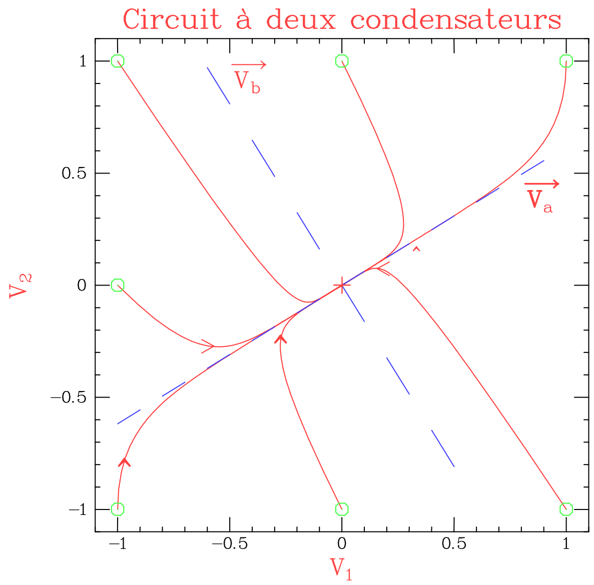

FIG. I.3: *Trajectoires issues de différentes conditions initiales dans l'espace des phases du circuit à deux condensateurs. Toutes les trajectoires convergent vers l'origine, rapidement dans la direction de $\vec{V_b}$, plus lentement suivant $\vec{V_a}$.*

La solution générale s'écrit : $\vec{V}(t) = c_a e^{(\lambda_a t/RC)}\vec{V_a} + c_b e^{(\lambda_b t/RC)}\vec{V_b}$ où λ_a (resp. λ_b) et $\vec{V_a}$ (resp. $\vec{V_b}$) sont les valeurs et vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, et c_a et c_b sont obtenus à l'aide des conditions initiales $V_1(t=0)$ et $V_2(t=0)$. Le point fixe est évidement $(V_1 = 0, V_2 = 0)$.

Calculons les vecteurs propres et les valeurs propres : $det.(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$. D'où

- $\lambda_a = (-3+\sqrt{5})/2$, avec : $V_a = \begin{pmatrix} 1 \\ (\sqrt{5}-1)/2 \end{pmatrix}$
- $\lambda_b = (-3-\sqrt{5})/2$, avec : $V_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -(1+\sqrt{5})/2 \end{pmatrix}$

On peut représenter les trajectoires dans le plan (V_1, V_2) comme sur la figure I.3.

Puisque les deux valeurs propres sont négatives, les directions propres ramènent la trajectoire à l'origine. Comme la valeur propre λ_b est la plus grande en valeur absolue, partant de toute condition initiale, le point représentatif du système est rapidement ramené vers le sous espace invariant associé à $\vec{V_a}$ pour rejoindre plus lentement l'origine parallèlement à celui-ci.

De façon générale, quand toutes les valeurs propres au voisinage d'un point fixe sont négatives, comme dans cet exemple, ce point fixe est appelé **nœud stable**.

I.2.2 Bille au sommet d'une colline

Considérons maintenant le cas d'une particule matérielle au sommet d'une colline parabolique dans un espace à une dimension. C'est un système à deux degrés de liberté : la position q et l'impulsion p, régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial q/\partial t &= p/m \\ \partial p/\partial t &= kq \end{cases} \tag{I.6}$$

Le point fixe est l'origine ($q = 0$, $p = 0$). Sa stabilité est obtenue en cherchant les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ k & 0 \end{pmatrix} \tag{I.7}$$

Les valeurs propres sont $\lambda = \pm\sqrt{k/m}$ et les vecteurs propres associés : $\vec{V_\pm}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{km} \end{pmatrix}$. L'espace des phases est représenté sur la figure I.4, une trajectoire correspondant à une solution de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V_+}\exp(\sqrt{k/m}\,t) + \vec{V_-}\exp(-\sqrt{k/m}\,t) \tag{I.8}$$

Lorsque les valeurs propres vérifient $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, on qualifie le point fixe de **point col** ou de **point selle** (*saddle node*).

Comme on pouvait s'y attendre, le point d'équilibre est instable puisqu'il existe une valeur propre positive, c'est-à-dire une direction de l'espace des phases suivant laquelle une trajectoire s'écarte de l'origine. La trajectoire qui s'en rapproche correspond au cas où la bille est lancée loin du sommet de la colline avec une vitesse juste suffisante pour l'atteindre. Les autres trajectoires correspondent à des cas intermédiaires : soit la vitesse est trop grande et la bille passe au dessus de la colline pour redescendre de l'autre coté, soit elle est trop faible et la bille rebrousse chemin avant d'arriver au sommet.

I.2.3 Bille au fond d'une vallée

Considérons maintenant le cas d'une particule matérielle au fond d'une vallée parabolique. Ce système possède deux degrés de liberté associés à la position q et l'impulsion p : il s'agit de l'oscillateur harmonique, régi par les équations I.2.

Le point fixe est toujours le point $(q = 0, p = 0)$. Une fois de plus recherchons les valeurs propres de la matrice pour étudier la stabilité :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix} \tag{I.9}$$

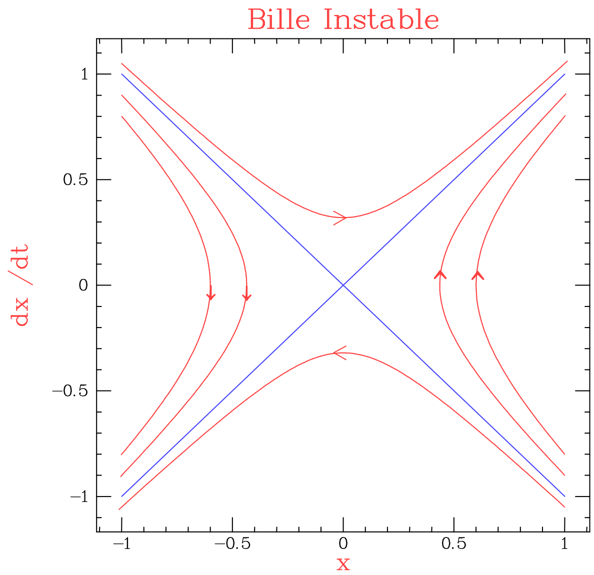

Fig. I.4: *Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille au sommet d'une colline. Les trajectoires illustrent un point col. Elles s'échappent toutes à l'infini, sauf celles qui démarrent exactement sur la direction contractante et conduisent précisément la bille au sommet de la colline. Les hyperboles telle que $x > 0$ correspondent aux cas où la vitesse initiale de la bille est trop faible pour passer au dessus de la colline.*

Les valeurs propres sont complexes conjuguées $\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$ et avec les vecteurs propres : $\vec{V_\pm}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\sqrt{km} \end{pmatrix}$. Une trajectoire correspond à une solution de la forme :

$$\vec{V} = \vec{V_+}\exp(i\sqrt{k/m}t + \phi) + \vec{V_-}\exp(-i\sqrt{k/m}t + \phi) \tag{I.10}$$

L'espace des phases est représenté sur la figure I.5. Les trajectoires y sont maintenant des ellipses. Le mouvement de la bille est une oscillation dont la fréquence est indépendante de l'amplitude (le "rayon" de l'ellipse) et donnée par les valeurs propres $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, le point fixe est appelé *foyer* ou *centre*.

I.2.4 Les différents types de points fixes

Pour des valeurs propres réelles, le point fixe est un *nœud stable* si elles sont toutes négatives, un *point col* ou encore un *point selle* si certaines sont positives.

Pour des valeurs propres complexes, le point fixe est un **foyer** ou **centre**.

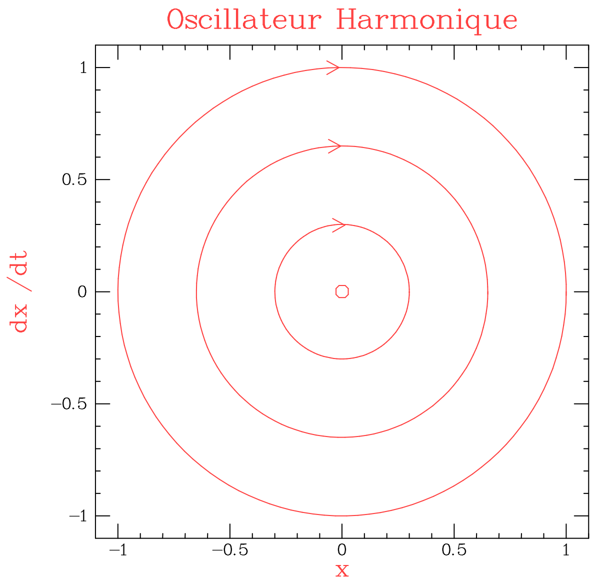

Fig. I.5: *Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille au fond d'une vallée ou d'un oscillateur harmonique. Ces trajectoires sont décrites dans le sens des aiguilles d'une montre. Le point invariant est un* centre.

I.3 Systèmes dissipatifs et hamiltoniens

Les trois exemples que ne nous venons de discuter présentent des différences importantes qui permettent de distinguer certaines classes de systèmes. Le circuit aux deux condensateurs relaxe toujours vers l'origine quelles que soient les conditions initiales choisies. L'énergie électrique accumulée dans les condensateurs est dissipée par les résistances au cours du temps. Par contre les deux exemples mécaniques conservent l'énergie du système. Au cours des mouvements de la bille, on assiste seulement à des transferts entre énergie potentielle et énergie cinétique. Evidement, ceci n'est vrai qu'en l'absence de frottements.

On appelle *systèmes hamiltoniens* ou *systèmes conservatifs* les systèmes qui conservent l'énergie totale et *systèmes dissipatifs* les autres.

I.3.1 Conservation des aires

L'espace des phases des systèmes hamiltoniens présente des caractéristiques remarquables. D'une part, deux trajectoires distinctes n'y ont aucun point d'intersection. C'est une conséquence immédiate du caractère déterministe du système : puisque des conditions initiales identiques conduisent à des trajectoires confondues et comme tout point de l'espace des phases peut être choisi comme une condition initiale, un point commun implique l'identité des deux trajectoires. D'autre part, les systèmes hamiltoniens conservent les aires dans l'espace des phases, ce qui constitue le théorème de LIOUVILLE. Considérons un volume Ω à l'instant t_0, et suivons son évolution au cours du temps. Il va se déformer mais son volume va rester constant. Ceci résulte de la nullité de la divergence de $d\vec{X}/dt$:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \int_{\Omega(t)} \mathrm{div}\left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right) dv \\ &= \int_{\Omega(t)} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}.\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\end{aligned} \tag{I.11}$$

où v est le volume de l'espace des phases du domaine $\Omega(t)$ transporté par le flot et H est l'Hamiltonien du système.

Il en résulte une propriété intéressante des valeurs propres d'un point fixe d'un système hamiltonien : leur somme a toujours une partie réelle nulle. Ainsi la bille en haut de la colline tombe avec une valeur propre $+\sqrt{k/m}$ mais il existe une trajectoire ramenant la bille au sommet avec la valeur propre opposée.

I.3.2 Systèmes dissipatifs

Une façon simple d'obtenir un système dissipatif consiste à prendre un système hamiltonien et à lui ajouter des frottements. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'équation du mouvement devient :

$$\begin{cases} \partial q/\partial t &= p/m \\ \partial p/\partial t &= -kq - \gamma p \end{cases} \tag{I.12}$$

Il est facile de voir que le terme de frottement γ induit l'apparition d'une partie réelle dans les valeurs propres $\lambda_\pm$ qui transforme les trajectoires elliptiques du cas sans frottements, en des spirales convergeant vers l'origine. On pourra de la même façon étudier l'influence du terme γ sur un point col.

Les systèmes dissipatifs peuvent aussi correspondre à une augmentation de l'énergie totale du système ; ceci se modélise par un γ négatif.

I.4 Systèmes hamiltoniens non linéaires

Les systèmes hamiltoniens ayant fait l'objet d'études intensives [2, 3], il nous est possible de dégager les conditions nécessaires pour observer des trajectoires chaotiques. Comme nous le verrons, le caractère *non-linéaire* constitue l'une de ces conditions essentielles. Cependant tous les systèmes non-linéaires ne sont pas chaotiques, comme nous l'illustrons avec les deux exemples qui suivent.

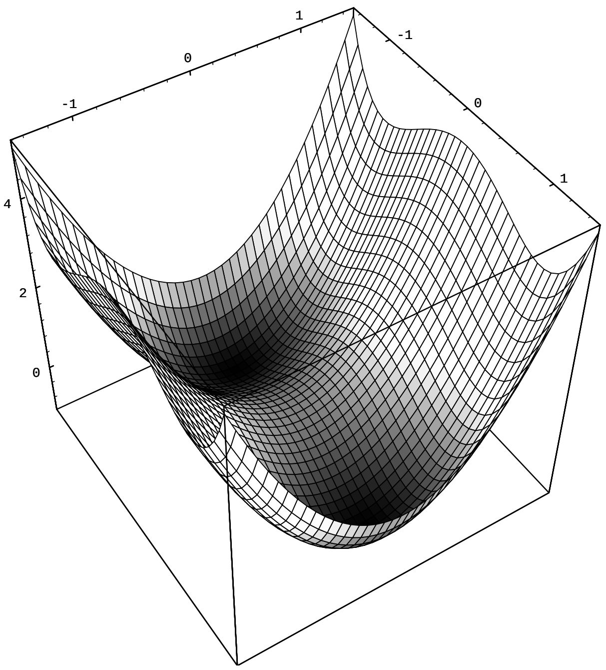

FIG. I.6: *Représentation de la surface d'énergie totale en fonction de la position et de la vitesse de la bille dans un potentiel à deux puits*

I.4.1 Bille dans un potentiel à deux puits

Un système est *non-linéaire* dès que les équations qui le gouvernent ne sont plus des fonctions linéaires de $\vec{X}$.

C'est le cas, par exemple, si la force qui agit sur une bille est du type : $\partial p/dt = q - q^3$. Cette situation correspond à une bille placée dans un potentiel à deux puits, situés en $q = \pm 1$. Le système possède toujours deux degrés de liberté et est décrit par :

$$\begin{cases} \partial q/\partial t &= p/m \\ \partial p/dt &= q - q^3 \end{cases} \tag{I.13}$$

Les solutions de l'équation I.13 sont beaucoup moins faciles à déterminer que celles d'un système linéaire. Nous verrons par la suite qu'il est même parfois impossible de trouver les solutions de certains systèmes non-linéaires. A ce stade, nous ferons une analyse qualitative des trajectoires dans l'espace des phases. Pour ce faire nous commençons par en déterminer les points fixes, qui sont au nombre de trois :

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{I.14}$$

Autour de chacun d'eux, nous pouvons maintenant linéariser les équations I.13. Autour de l'origine, nous retrouvons les équations I.6 et donc prédire que ce point fixe est un point col. Pour les deux points fixes restants : A_{-1} et A_1 on constate que la linéarisation conduit à un

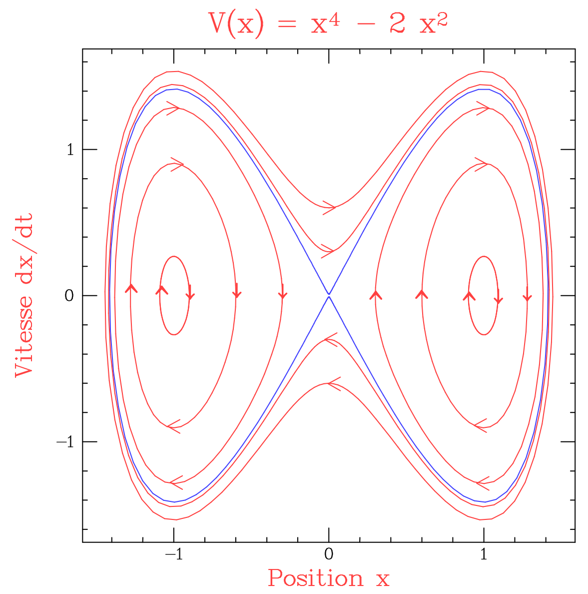

Fig. I.7: *Trajectoires dans l'espace des phases d'une bille dans un potentiel à deux puits. Ces trajectoires correspondent aussi aux lignes de niveau de la surface décrite sur la figure I.6.*

système d'équations du type I.2. Ces points fixes sont donc des centres et les trajectoires voisines sont des ellipses. Pour obtenir les trajectoires du système dans tout l'espace des phases, on est tenté de prolonger *à la main* le motif formé par le point col entouré de deux centres.

En fait, il existe une façon rigoureuse de procéder. Nous avons vu que les systèmes hamiltoniens conservent l'énergie au cours du temps. Construisons donc un graphique à trois dimensions dont deux sont celles de l'espace des phases et la troisième l'énergie totale du système. Ainsi nous obtenons une surface $\mathcal{S}$ avec un point col à l'origine séparant deux bassins autour des autres points fixes. Puisque l'énergie est invariante, une trajectoire du mouvement correspond à une coupe de la surface $\mathcal{S}$ selon une énergie constante. Les trajectoires du système sont équivalentes aux courbes de niveau de la surface $\mathcal{S}$, reproduites sur la figure I.7.

La méthode que nous venons de décrire est tout à fait générale : elle ne dépend pas du potentiel non-linéaire et elle peut s'appliquer à tous les systèmes hamiltoniens ayant deux degrés de liberté. Dans la mesure où la surface $\mathcal{S}$ ne présente pas de pathologie particulière, nous obtiendrons soit des trajectoires fermées, soit des trajectoires qui partent à l'infini. Par contre, cette méthode ne nous permet pas de déterminer les dynamiques de parcours de ces trajectoires. S'il est clair que les trajectoires fermées correspondent à des mouvements périodiques, il n'est pas possible d'en déterminer la fréquence avec le seul raisonnement que nous venons de faire. Près des points fixes de type centre,

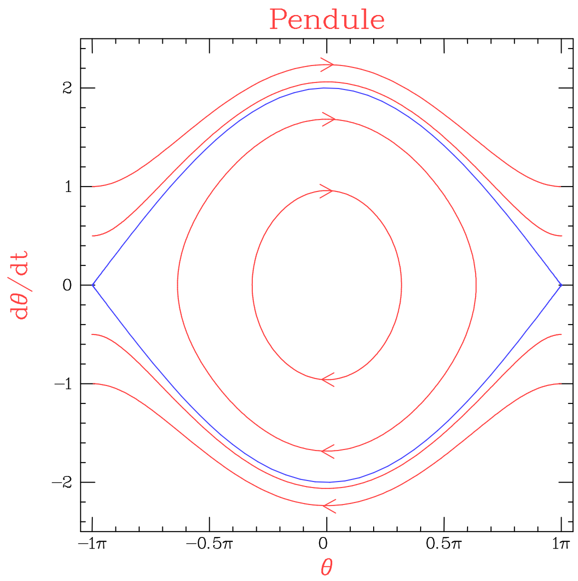

Fig. I.8: *Trajectoires dans l'espace des phases du pendule. L'espace des phases est périodique dans la direction θ, les trajectoires qui atteignent $(+\pi, \dot\theta)$ reviennent ainsi en $(-\pi, \dot\theta)$. Ces trajectoires, dites passantes, correspondent au cas ou le pendule est animé d'un mouvement de rotation. Les trajectoires fermées au centre décrivent les mouvements d'oscillation du pendule. La trajectoire qui délimite les deux types de mouvements joint les points col en $(\pm\pi,\ O)$; c'est la* séparatrice.

la fréquence sera celle des oscillations harmoniques. Nous nous attendons à un allongement de la période en nous approchant du point col, puisque celle-ci diverge lorsque la trajectoire l'atteint.

I.4.2 Le pendule pesant

Nous allons constamment revenir sur cet exemple du pendule car il constitue un des systèmes non-linéaires les plus simples . Il possède deux degrés de liberté (au sens des systèmes dynamiques) : sa position angulaire θ et sa vitesse angulaire $\dot\theta$. Elles sont régies par les équations :

$$\begin{cases} \partial\theta/\partial t & = \dot\theta \\ \partial\dot\theta dt & = -g/l \sin\theta \end{cases} \qquad \text{(I.15)}$$

Nous pouvons répéter la même analyse que celle déjà faite en I.4.1. L'origine de l'espace des phases apparaît comme un centre : c'est le domaine des petites oscillations. Si l'on restreint θ à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, nous y trouvons deux points fixes de type col en $\theta = \pm\pi$ et $\dot\theta = 0$. Les courbes de niveau à énergie constante conduisent à la figure I.8.

Il existe une trajectoire très particulière qui relie les points invariants entre eux : c'est la *séparatrice.*

Lorsqu'il suit cette trajectoire, le pendule part de la position retournée ($\theta = -\pi$), s'en écarte doucement puis bascule rapidement autour de $\theta = 0$ et finalement remonte pour atteindre assymptotiquement $\theta = \pi$. Le nom de séparatrice provient du fait que cette trajectoire est la frontière dans l'espace des phases entre les trajectoires fermées entourant le point fixe centre $\bar{\dot{\theta}} = 0$, et les trajectoires passantes pour lesquelles $\bar{\dot{\theta}} \neq 0$ où $\bar{\dot{\theta}}$ représente la vitesse moyenne de rotation. Ces trajectoires passantes correspondent au cas où le pendule tourne continûment.

I.5 Intégrabilité des systèmes hamiltoniens

Lorsqu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace des phases, ce système est dit *intégrable.*

Nous venons de voir deux exemples de tels systèmes non-linéaires. L'invariance de l'énergie, caractéristique des systèmes hamiltoniens, permettant de déterminer les trajectoires des systèmes possédant deux degrés de liberté, il en résulte que tous ces systèmes sont intégrables. Cela ne signifie pas pour autant qu'il soit facile de trouver l'expression analytique des solutions des équations du mouvement, mais nous sommes sûrs qu'elles existent.

Quant aux systèmes ayant un plus grand nombre de degrés de liberté n, l'invariance de l'énergie nous permet de dire que leurs trajectoires appartiennent à un sous-espace de dimension $n-1$. Mais cela ne permet plus de les caractériser.

Pourtant, dans nos cours de mécanique, nous avons déjà rencontré des exemples de systèmes ayant plus de deux degrés de liberté et dont nous pouvions déterminer analytiquement les trajectoires. Nous nous proposons de rappeler deux exemples de ce type qui vont nous permettre d'illustrer les conditions nécessaires à l'intégrabilité.

I.5.1 Système de deux oscillateurs harmoniques couplés

Considérons deux oscillateurs harmoniques couplés linéairement comme ceux de la figure I.9.

Il nous faut désormais quatre équations pour décrire notre système :

$$\begin{cases} \partial q_1/\partial t &= p_1/m \\ \partial p_1/dt &= -Kq_1 + k(q_1 - q_2) \\ \partial q_2/\partial t &= p_2/m \\ \partial p_2/dt &= -Kq_2 + k(q_2 - q_1) \end{cases} \tag{I.16}$$

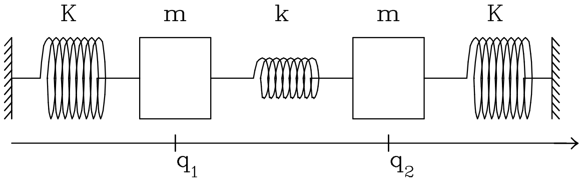

FIG. I.9: *Système de deux oscillateurs harmoniques couplés linéairement.*

Comme le système est linéaire, nous savons qu'il est possible de trouver les solutions. Or la recherche de ces solutions consiste à déterminer les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice. Il existe donc un changement de base où la matrice est diagonale, c'est-à-dire où le couplage des oscillateurs disparait (ici $u = q_1 + q_2$ et $v = q_1 - q_2$). Dans cette nouvelle base, nous pouvons séparer les oscillateurs couplés en deux nouveaux oscillateurs indépendants ayant deux fréquences différentes : $\omega_+ = \sqrt{(K + 2k)/m}$ et $\omega_- = \sqrt{K/m}$. Le mouvement est donc la composée de deux oscillations. Nous avons vu qu'à une oscillation correspondait une courbe fermée dans l'espace des phases (pour un oscillateur linéaire une ellipse) ; la composée de deux mouvements de cette nature engendre une surface torique. Nous pouvons donc dire que la dimension de la trajectoire dans l'espace des phases est ici deux. L'espace des phases étant *a priori* de dimension quatre, l'invariance de l'énergie totale nous conduit à une solution appartenant à un sous espace de dimension trois. La symétrie particulière de ce problème conduit à une solution n'explorant que deux dimensions.

I.5.2 Problème à deux corps, mouvement dans un champ de force central

Le problème d'un système composé de deux particules matérielles en interaction a eu une très grande importance historique. C'est traditionnellement le *problème à deux corps* (la Terre et la Lune, par exemple). Comme les corps peuvent se déplacer dans les trois directions de l'espace physique, l'espace des phases de ce système est *a priori* de dimension 12 puisqu'il faut 3 coordonnées d'espace et autant de coordonnées d'impulsion pour caractériser chaque particule. Nous allons montrer comment il est possible de séparer les différents degrés de liberté et ainsi prédire le mouvement des deux corps.

Dans la mesure où les deux corps ne sont soumis à aucune force extérieure et puisque l'énergie d'interaction ne dépend que de la distance entre les deux particules, le mouvement du centre de masse est une translation à vitesse uniforme [1] et chacune des composantes de cette vitesse est invariante. Comme nous pouvons associer trois variables de position et trois d'impulsion au centre de masse, nous pouvons réduire d'autant le nombre de degrés de liberté en nous plaçant dans le

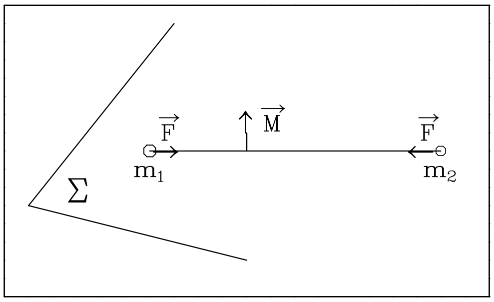

FIG. I.10: *Deux corps en interaction avec force centrale, le mouvement a lieu dans le plan Σ perpendiculaire au moment cinétique.*

référentiel du centre de masse. Nous devons maintenant déterminer le mouvement d'un corps soumis à un champ de force central, c'est à dire dont le vecteur force pointe toujours vers l'origine, et dont l'amplitude ne dépend que du module de la distance à l'origine du corps r. Le moment cinétique de cette particule $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ est par définition perpendiculaire à $\vec{r}$, donc à la force, et par suite invariant. Cette invariance impose au mouvement d'avoir lieu dans un plan perpendiculaire à $\vec{M}$. Ainsi nous nous ramenons à un problème plan limité à deux coordonnées d'espace et deux d'impulsion. L'invariance du moment cinétique permet de déterminer le mouvement de la particule. Exprimée en coordonnées polaires (r, ϕ), l'énergie totale du système s'écrit :

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{I.17}$$

où $U(r)$ est le potentiel d'interaction. Grâce à l'invariance du moment cinétique, cette énergie ne dépend pas explicitement de ϕ, et prend la forme de celle d'un oscillateur placé dans un potentiel effectif :

$$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{I.18}$$

Ainsi avons-nous séparé le problème en couples de variables conjuguées (q_i, p_i). Comme tous les systèmes à deux degrés de liberté sont intégrables, nous savons que celui de l'oscillateur dans le potentiel U_{eff} l'est aussi, et ceci quel que soit $U(r)$. Le mouvement final est donc la composition d'une oscillation dans le potentiel U_{eff} avec une rotation à la vitesse $\dot{\phi} = M/mr^2$. L'oscillation se fait entre deux valeurs r_{min} et r_{max} positives. La vitesse rotation présente un comportement analogue. La trajectoire dans l'espace des phases est à nouveau la composition de deux courbes fermées : elle a la topologie d'un tore. La projection d'une trajectoire dans le plan (r, ϕ) est donnée sur la figure I.11.

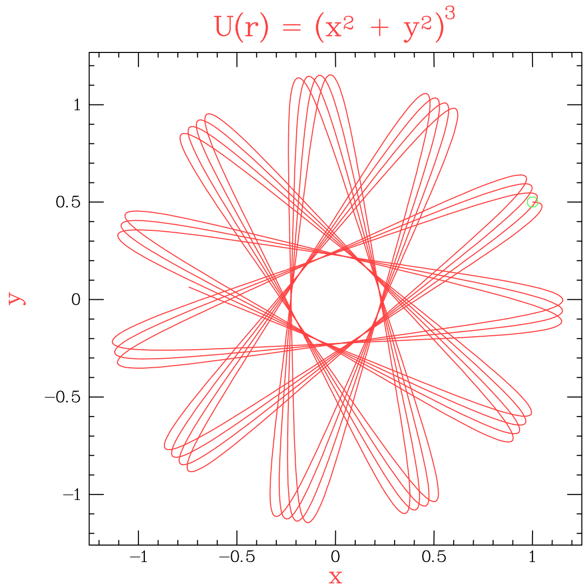

FIG. I.11: *Trajectoire d'une particule dans un champ de force central : c'est la composition d'une rotation et d'une oscillation.*

I.5.3 Rôle des invariants, systèmes séparables

Les deux exemples que nous venons de discuter permettent de généraliser la notion d'intégrabilité. On dit qu'un système est *intégrable* s'il est possible de le séparer en couples de variables conjuguées indépendants les uns des autres, c'est-à-dire de le séparer en oscillateurs indépendants. Comme nous savons décrire les trajectoires de tout oscillateur à deux dimensions (une variable d'espace et une d'impulsion), la trajectoire d'un système séparé est obtenue en composant les mouvements de ses différents oscillateurs.

Bien qu'il existe une définition de l'intégrabilité, il n'existe pas de méthode infaillible permettant de séparer les variables. Dans les deux exemples précédents, l'existence d'une symétrie particulière du problème, nous a permis de trouver le changement de variables adapté conduisant à la séparation. La présence d'un invariant (comme le moment cinétique) est un indice fondamental de l'intégrabilité d'un système.

Or l'intégrabilité d'un système dont l'espace des phases est de dimension $2n$, implique l'existence de n invariants. En effet, parmi les systèmes hamiltoniens à $2n$ degrés de liberté, les trajectoires de ceux qui sont intégrables explorent un sous espace correspondant aux composées de n oscillations. Ce sous-espace est donc de dimension n.

Si un système n'est pas intégrable, la restriction minimale liée à l'invariance de l'énergie impose à l'espace exploré par sa trajectoire d'être de dimension $2n - 1$ au plus. Les systèmes intégrables sont donc des

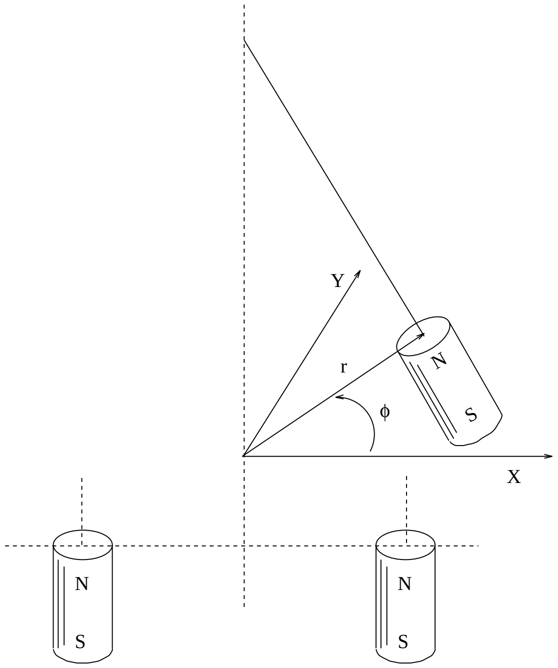

FIG. I.12: *Dispositif du pendule magnétique. Il permet de passer d'un système à champ de force central à un qui ne l'est pas, et d'observer ainsi une trajectoire chaotique.*

systèmes très particuliers, moins généraux que ceux qui ne le sont pas.

I.6 Existence et caractérisation du chaos

Nous avons longuement discuté l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens ; nous allons ici décrire rapidement les conséquences de la non intégrabilité d'un système.

I.6.1 Problème à deux corps, champ de force non-central

Que se passe-t-il quand le champ de force agissant sur les deux corps n'est plus de symétrie centrale ?

En premier lieu, si le champ de force n'est plus central, le moment cinétique n'est plus invariant et nous ne pouvons plus découpler l'oscillation radiale de la rotation suivant ϕ. Inutile de dire qu'on ne peut pas donner d'expression analytique de la trajectoire du système.

La façon la plus simple de comprendre ce qui se passe est sûrement de réaliser une petite expérience. Constituons un pendule en accrochant un aimant à un fil et laissons lui la possibilité d'explorer les deux directions x et y accessibles avec le fil tendu. Ce système possède quatre degrés de liberté : deux variables de

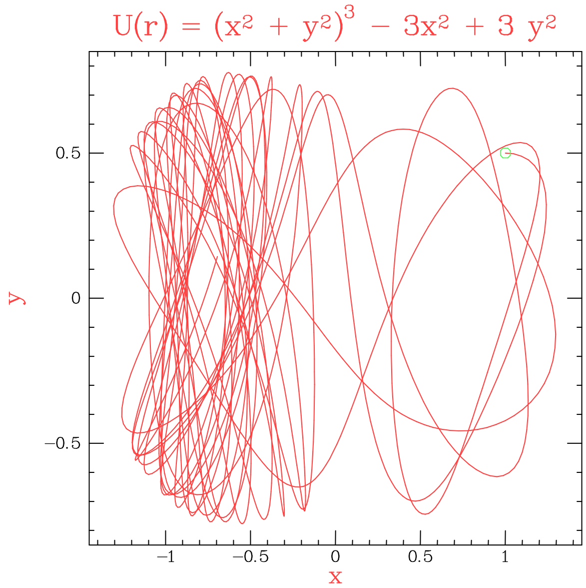

FIG. I.13: *Trajectoire du pendule magnétique soumis à un champ de force non central.*

position x, y et deux d'impulsions $\dot{x}$ et $\dot{y}$. En plaçant un autre aimant statique à l'aplomb du pendule, nous réalisons un dispositif à champ de force central qui nous permet de retrouver les trajectoires de la figure I.11. Si nous remplaçons cet aimant par deux aimants situés de part et d'autre de l'aplomb du pendule, nous créeons un champ de force qui n'est plus à symétrie centrale. Ecarté de sa position d'équilibre, le pendule évolue sous l'influence des deux aimants, et décrit une trajectoire bien définie, compliquée, le plus souvent *chaotique* ! Une trajectoire de ce type est présentée sur la figure I.13.

I.6.2 Caractérisation du Chaos : Spectre de puissance

Une façon simple de caractériser le chaos consiste à calculer le spectre de FOURIER de l'évolution temporelle d'une des variables du système. Nous avons vu que les trajectoires d'un système intégrable étaient la composition de mouvements d'oscillation ayant chacun une pulsation ω_i. Le spectre d'une variable d'un tel système ne contient donc qu'une assemblée de raies fines situées aux pulsations ω_i, à leurs harmoniques $m\omega_i$ avec $m \in \mathcal{N}$, et aux combinaisons linéaires de fréquences $m\omega_i + n\omega_j$ avec m et $n \in \mathcal{Z}$ (voir figure I.14). Les spectres qui sont la combinaison de plusieurs fréquences sans rapports simple sont dit *quasipériodiques*.

L'oscillation du pendule magnétique dans la configuration avec deux aimants statiques fournit un large spectre de FOURIER s'étendant sur une gamme de fréquences, proche du spectre d'un bruit, comme le montre la figure I.15.

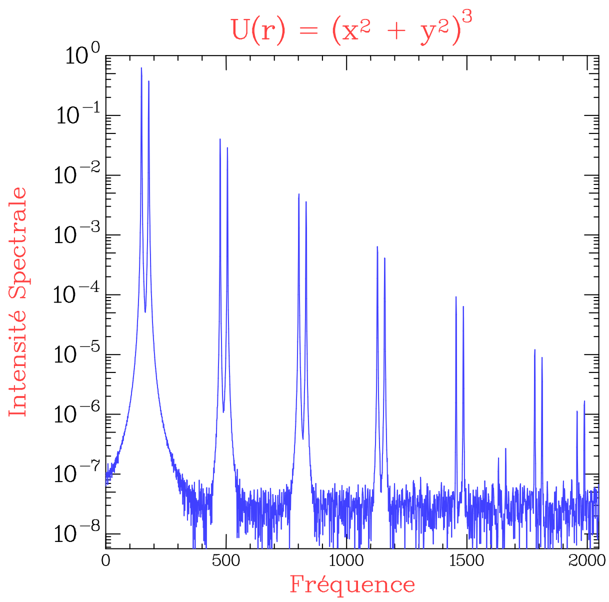

Fig. I.14: *Spectre de puissance du pendule magnétique ayant un comportement régulier. On remarque la présence de deux fréquences et de leurs harmoniques.*

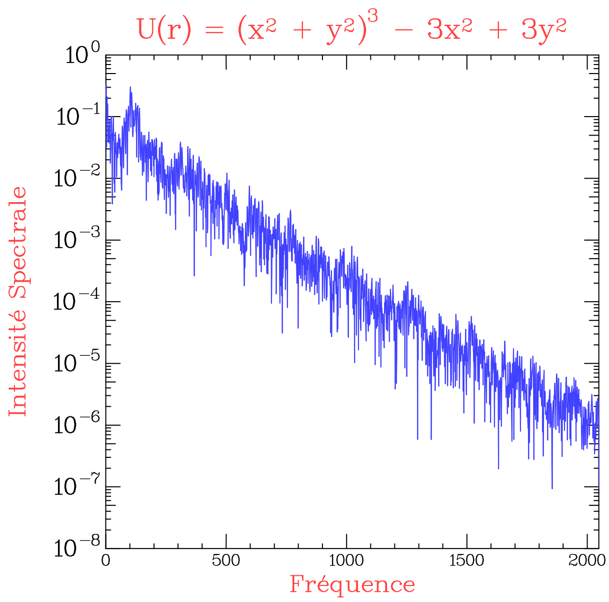

Fig. I.15: *Spectre de puissance du pendule magnétique ayant un comportement chaotique.*

L'existence de spectres larges est une caractéristique essentielle des mouvements chaotiques d'un système. Toutefois, il est possible qu'en plus des raies larges, un système chaotique présente aussi des raies étroites semblables à celles d'un système régulier.

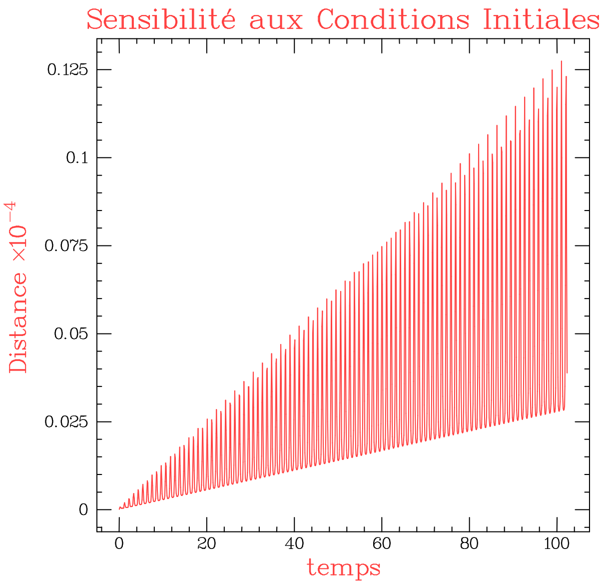

Fig. I.16: *Evolution de la distance entre deux trajectoires voisines pour le pendule magnétique soumis à un champ de force central. Remarquer l'échelle linéaire des distances. Les oscillations rapides correspondent au va et vient de la trajectoire.*

I.6.3 Caractérisation du chaos : sensibilité aux conditions initiales

Une façon plus directe de caractériser une trajectoire chaotique revient à mesurer le degré d'imprévisibilité du système. Certes, bien que non intégrable, le pendule magnétique est un système déterministe, et deux expériences partant de conditions initiales rigoureusement identiques évoluent suivant la même trajectoire. Mais si les deux conditions initiales ne sont simplement que voisines, la distance séparant les deux trajectoires dans l'espace des phases évolue très différemment selon que la trajectoire est régulière ou chaotique.

En effet pour une trajectoire régulière, comme celle du pendule magnétique soumis à un champ de force central, des amplitudes d'oscillations mais surtout des fréquences légèrement différentes vont être associées à deux conditions initiales voisines. Il en résulte que les oscillateurs associés vont se décaler linéairement avec le temps comme le font deux montres mal réglées. Pour les trajectoires régulières, la séparation dans l'espace des phases croît **linéairement** avec le temps, comme le montre la figure I.16.

Lorsque le système n'est pas intégrable et qu'il présente des solutions chaotiques, comme le pendule magnétique avec deux aimants, les oscillations issues de deux conditions initiales voisines sont fortement corrélées au début de l'évolution, mais, rapidement, la différence entre les deux trajectoires augmente et conduit à une décorrélation totale après quelques oscillations.

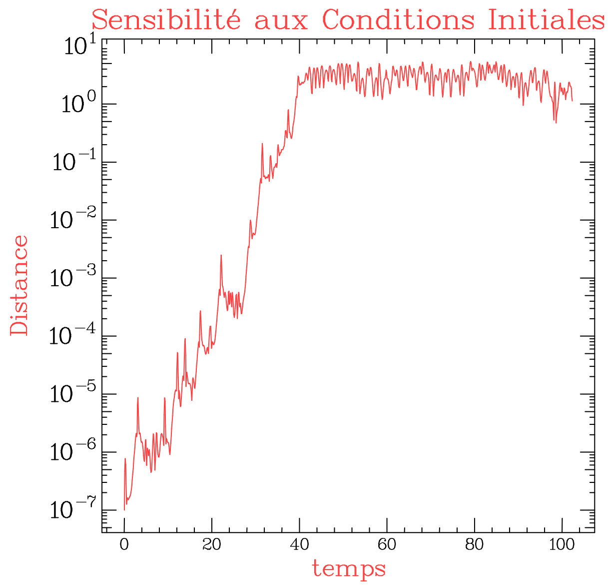

FIG. I.17: *Evolution de la distance entre deux trajectoires voisines chaotiques. Remarquez l'échelle logarithmique. A $t = 40$, la distance sature car elle devient égale à la taille du domaine exploré par la trajectoire.*

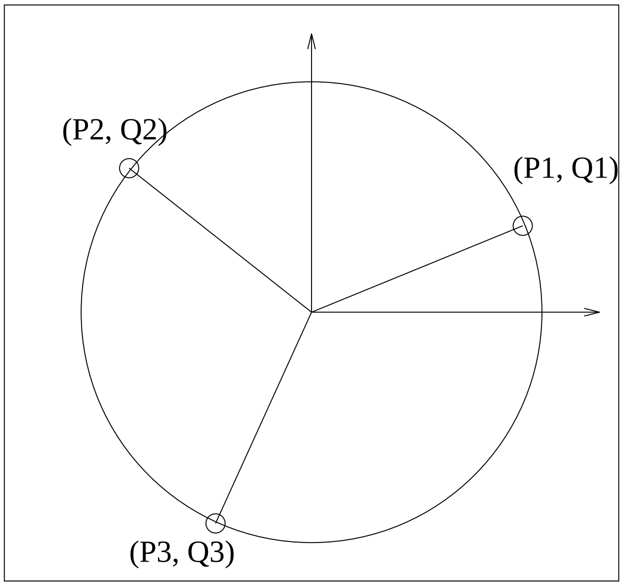

FIG. I.18: *La chaîne de Toda avec ses trois particules se déplaçant sur un cercle.*

Cette fois-ci, la distance entre les deux trajectoires augmente **exponentiellement** avec le temps. Notons que cette évolution n'est pas homogène en fonction du temps mais simplement en valeur moyenne comme le montre la figure I.17.

Lecture complémentaire

Un contre-exemple : la chaîne de Toda

La chaîne de TODA[4] est un exemple classique qui montre qu'il peut être très difficile de déterminer si un problème est intégrable ou non. Il correspond aux cas de trois particules de masses identiques se déplaçant sur un cercle et se repoussant les unes les autres avec une force qui varie exponentiellement avec la distance :

$$\begin{aligned} H = \; & \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \exp(q_3 - q_1) \\ & + \exp(q_1 - q_2) + \exp(q_2 - q_3) - 3 \end{aligned} \tag{I.19}$$

Nous avons un système ayant un espace des phases de dimension 6 : les positions des trois particules et leurs vitesses respectives. De plus l'interaction est non-linéaire (fonction exponentielle). Toutes les conditions sont requises pour que ce système soit non-intégrable. Cependant les simulation numériques ne montrent que des solutions régulières. Voyons comment il est possible de séparer ce système. L'énergie est bien sûr invariante, mais $p_1 + p_2 + p_3$ est aussi un invariant. Ceci nous permet de séparer les variables $Q = q_1 + q_2 + q_3$ et $P = p_1 + p_2 + p_3$, qui sont découplés et on ne s'intéresse plus qu'à un système possédant 4 degrés de libertés équivalent à une bille se déplaçant dans un potentiel à deux dimensions vérifiant :.

$$\begin{aligned} H' = \; & \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \tfrac{1}{24}[\exp(2y + 2\sqrt{3}x) \\ & + \exp(2y - 2\sqrt{3}x) + \exp(-4y)] - \tfrac{1}{8} \end{aligned} \tag{I.20}$$

Ce système est encore non-linéaire et possède suffisamment de degrés de liberté pour être chaotique. Cependant les simulations numériques conduisent encore à des solutions régulières. Le plus étonnant se produit lorsque l'on approxime les termes non-linéaires par les deux premiers termes de leur développement :

$$H'' = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \tag{I.21}$$

Le modèle ainsi obtenu porte le nom de HÉNON-HEILES. Aux petites valeurs de l'énergie, on obtient bien des trajectoires voisines de celles obtenues avec l'équation exacte. Par contre pour les énergies plus grandes les trajectoires sont chaotiques !

C'est HÉNON qui a donné l'explication en trouvant un second invariant à la chaîne de TODA qui permet d'intégrer complètement les équations. Par contre il disparaît dans l'approximation qui mène au modèle de HÉNON HEILES. Ce qui explique les trajectoires chaotiques. La difficulté provient de la forme de l'invariant trouvé par HÉNON, loin d'être intuitif et ne correspondant à aucune symétrie évidente. Son expression est la suivante :

$$
\begin{aligned}
I = \quad & 8p_x(p_x^2 - 3p_y^2) + (p_x + \sqrt{3}p_y)\exp(2y - 2\sqrt{3}x) \\
-2p_x \quad & \exp(-4y) + (p_x - \sqrt{3}p_y)\exp(2y + 2\sqrt{3}x)
\end{aligned}
\tag{I.22}
$$

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode systématique permettant de trouver les invariants d'un système. Et ne pas en trouver ne signifie certainement pas qu'il n'en n'existe pas ! Il faut retenir que si le système étudié est non-linéaire et possède plus de deux degrés de liberté, nous avons là les conditions nécessaires pour avoir un comportement chaotique, mais ces conditions ne sont pas suffisantes.

Exercices

Le circuit RC

Considérons le circuit composé d'un condensateur avec une résistance en parallèle dont un point est à la masse. Indiquez le nombre de degré de libertés, le ou les points fixes et calculez le ou les vecteurs propres et valeurs propres associés. S'agit-t-il d'un système linéaire ?

Equilibre instable

On considère le cas de la bille au voisinage du sommet d'une colline décrit en I.2.2 et dont les trajectoires sont représentées sur la figure I.4. On cherche avec quelle vitesse sont parcourus les trajectoires hyperboliques pour lesquelles x est toujours positif. Ces trajectoires correspondent au cas où la bille n'a pas une vitesse suffisante pour franchir la colline. Déterminer comment varie le temps mis pour partir du point ($x = 1$, $\dot{x} < 0$) et arriver à son homologue ($x = 1$, $\dot{x} > 0$) en fonction de x_{min} valeur minimum de x atteinte par la trajectoire. Que se passe-t-il pour $x_{min} = 0$?

La bille qui rebondit sur le sol

On lâche une bille qui ne peut se déplacer que verticalement soumise au champ de pesanteur terrestre et qui rebondit sans dissiper d'énergie sur le sol.

- Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ?
- Sans faire de calcul, indiquez comment varie la fréquence du *toc toc* qu'elle fait en touchant le sol, en fonction de la hauteur dont elle tombe.
- Pouvez vous en déduire si le système est linéaire ou non ?
- Ecrire les équation du mouvement et tracer l'allure des trajectoire dans l'espace des phases.
- Calculer la période du mouvement en fonction de la hauteur maximale atteinte par la bille.

Le problème à deux corps : un cas très particulier

Le problème à deux corps est celui de la Terre et de la Lune, par exemple. Rappeller quelle est la nature de la trajectoire. En comparant cette solution à celle de la figure I.11, indiquez comment le mouvement d'oscillation dans le potentiel effectif I.18 est relié à la rotation ϕ de l'axe des deux astres. Cette relation dépend-t-elle de l'amplitude d'oscillation ?

Montrer ce résultat en calculant la période d'oscillation explicitement et en la comparant à $\Delta\phi$, l'angle dont ont tourné les deux corps après une oscillation.

Une approche du problème à trois corps

C'est le cas de trois particules en interaction, par exemple la Terre, la Lune et le Soleil.

- Indiquez le nombre de degrés de liberté du système.
- Si les interactions sont du type gravitationnel, s'agit-il d'un système linéaire ?
- En utilisant les invariants simples, à quel nombre de degrés de liberté peut-on se ramener ?
- Peut-on dire s'il s'agit d'un système intégrable ou non ?
- Le système Terre Lune Soleil a-t-il un comportement chaotique ?

Bibliographie

[1] L. Landau et E. Lifchitz *Mécanique* Ed. Mir

[2] V. Arnold *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique* Ed. Mir

[3] V. Arnold *Equations Différentielles Ordinaires* Ed. Mir

[4] A.J. Lichtenberg and M.A. Liberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag (1983)

[5] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, *L'ordre dans le chaos*, Ed. Hermann (1984)

[6] P. Manneville, *Structures Dissipatives Chaos et Turbulence*, Collection Aléa Saclay, 91 191 Gif-sur-Yvette Cedex, (1991)

[7] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos*, VCH, (1989)